Universidad de Chile
Departamento de Física
FI7002 - Mecánica Cuántica II

Tarea 5

Fecha de Entrega: 10 de diciembre

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

P1. Un modelo simple del efecto fotoeléctrico.

Considere, en un problema unidimensional, una partícula de masa m colocada en un potencial de la forma $V(x) = -\alpha\delta(x)$, donde α es una constante real positiva.

(a) Encuentre el estado ligado $|\varphi_0\rangle$ y los estados de scattering $|\chi_k\rangle$ estacionarios del sistema. Para los estados de scattering, considere solamente las "partículas" incidentes que van desde $x = -\infty$ hacia $x = +\infty$.

(b) Muestre que los estados de scattering $|\chi_k\rangle$ anteriores satisfacen la relación de ortonormalización $\langle\chi_k|\chi_{k'}\rangle = \delta(k - k')$. Puede usar que

$$\int_{-\infty}^{0} e^{iqx}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-iqx}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon + iq} = \pi\delta(q) - i\mathcal{P}\left(\frac{1}{q}\right). \tag{1}$$

Calcule la densidad de estados $\rho(E)$ para una energía positiva E.

(c) Calcule el elemento de matriz $\langle\chi_k|X|\varphi_0\rangle$ del observable posición X entre el estado ligado $|\varphi_0\rangle$ y el estado de energía positiva $\langle\chi_k|$.

(d) La partícula, con carga q, interactúa con un campo eléctrico oscilante a una frecuencia angular ω. La perturbación correspondiente es $W(t) = -q\mathcal{E}X\sin(\omega t)$, donde $\mathcal{E}$ es una constante. La partícula inicialmente se encuentra en el estado ligado $|\varphi_0\rangle$. Asuma que $\hbar\omega > -E_0$. Calcule la probabilidad de transición por unidad de tiempo f a un estado de energía positiva E arbitraría. ¿Cómo varía f con ω y $\mathcal{E}$?

P2. (a) Considere una partícula de spin 1. Ella está en presencia de un campo magnético $\vec{B}(t)$ que precesa en torno al eje z con velocidad angular ω, manteniendo un ángulo α constante con respecto al eje z. El Hamiltoniano está dado por $H = \frac{e}{m}\vec{B}\cdot\vec{S}$. Si en $t = 0$ la partícula estaba en el estado "spin up" con respecto a $\vec{B}$, calcule la fase de Berry asociada a la trayectoria que recorre el estado.

(b) Considere la misma situación anterior, salvo que el campo magnético ahora describe una trayectoria arbitraria en el espacio de parámetros del Hamiltoniano. Suponga que la trayectoria mencionada es cerrada y está dentro de los límites de la aproximación adiabática.

P3. Suponga que la amplitud de scattering para cierta reacción está dada por

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\left(\frac{\Gamma k}{k_0 - k - ik\Gamma} + 3e^{2i\beta k^3}\sin(2\beta k^3)\cos(\theta)\right), \tag{2}$$

donde Γ, k_0 y β son constantes características del potencial que produce el scattering.

(a) ¿Qué ondas parciales están activas?

(b) ¿Cuáles son los corrimientos de fase en las ondas parciales activas? ¿Tienen el comportamiento adecuado cuando $k \to 0$?

(c) ¿Cuál es la sección eficaz diferencial, $d\sigma/d\Omega$, para cualquier valor de k?

(d) ¿Cuáles son las secciones eficaces parciales σ_l?

(e) Asuma $\beta k_0^3 << 1$. Dé una aproximación a la sección eficaz total para $k \approx k_0$.

(f) ¿Cuál es la sección eficaz total para cualquier valor de k? ¿Cuál es la parte imaginaria de la amplitud de scattering hacia adelante (i.e., $f(0)$)? ¿Se satisface el teorema óptico?

P4. Un potencial $V(r)$ es de la forma de Yukawa,

$$V_Y(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{3}$$

para $r > R$, pero es desconocido para $r < R$. La sección eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$ ha sido medida como función de la energía ($\hbar^2 k^2/2m$) y los ángulos, para valores de k hasta $\sim 1/R$. Los intentos de ajustar $d\sigma/d\Omega$ con los resultados teóricos de la formulación de ondas parciales usando un número pequeño de corrimientos de fase $\delta_l(k)$ (es decir, asumiendo que $\delta_l = 0$ para todo l a partir de cierto l_0) ha sido un completo fracaso.

Puede ser que a pesar de que los corrimientos de fases para $l > l_0$ sean todos pequeños, su suma no puede ser despreciada. Esto sería muy molesto, pues habría que usar el método de ondas parciales para infinitos valores de l. Para poder avanzar, se realizan las siguientes suposiciones:

- Para valores altos de l el comportamiento de $V(r)$ para $r < R$ no importa debido a que el potencial centrífugo $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$ es dominante. De esta manera se puede calcular δ_l para valores altos de l simplemente con el potencial de Yukawa.
- Los δ_l pueden ser expandidos en potencias de β y podemos conservar solo el primer término. Esto es, cada uno de los δ_l es pequeño así que lo podemos expandir (es la suma de ellos la que causa problemas).

Siga el siguiente procedimiento para implementar esta idea, tratando $l \geq 1$ como valores grandes de l en el sentido mencionado anteriormente.

(a) Escriba la aproximación de Born para la amplitud de scattering $f_Y(\theta, \phi)$ para el potencial V_Y.

(b) Promedie f_Y sobre todos los ángulos para un k fijo y reste este valor promedio a f_Y.

Comentario: como la onda-s tiene promedio distinto de cero, mientras que las ondas parciales superiores tienen promedio cero, lo que acabas de hacer es sustraer la parte de la onda-s a la aproximación de Born de f_Y. Notar que usar la aproximación de Born es equivalente a linearizar en β, así que ya está hecho gran parte de lo que hay que hacer.

(c) Ahora debe agregar una expresión para la contribución de la onda-s a f. Como la onda-s es más sensible a la región de r pequeño, no se puede analizar utilizando el potencial de Yukawa. Por lo tanto solo agregue la contribución de la onda$-s$ a f en términos de un corrimiento de fase desconocido $\delta_0(k)$.

Escriba una fórmula expresando $d\sigma/d\Omega$ en términos de m, $\hbar$, k, θ, μ, β, y $\delta_0(k)$.

Comentario: para completar la historia, lo que se hace ahora es ajustar los datos a su fórmula y encontrar μ, β, y $\delta_0(k)$. Ahora el ajuste funciona muy bien, y el valor ajustado de μ resulta ser la masa del pión (por $c/\hbar$) tal como predijo Yukawa 20 años antes.