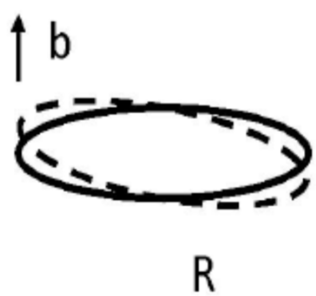
Tarea 6

Fecha de Entrega: 19 de diciembre

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

P1. Oscilaciones de una cuerda con condiciones de borde periódicas

Considere una cuerda tensa, con tensión τ y masa por unidad de longitud m que está constreñida a moverse sobre el manto de un cilindro de radio R, ejecutando pequeñas oscilaciones $y(s,t)$ en torno a una posición de equilibrio que es un círculo plano:



(a) Escriba el Lagrangiano para este sistema y verifique que las condiciones de borde periódicas son tales que el movimiento está dado por un extremo de la integral de acción.

(b) Busque las soluciones de la ecuación de onda y condiciones de borde periódicas en la forma

$$y(s,t) = \sum_n A_n(t)\phi_n(s). \tag{1}$$

Determine las autofunciones ϕ_n, así como los valores que puede adquirir el índice n. Recuerde que los desplazamientos son variables reales.

(c) Reemplace el resultado en el Lagrangiano. Defina momentos canónicamente conjugados a las variables dinámicas, y un Hamiltoniano. Use las propiedades encontradas para evaluar integrales y llegar a una forma de osciladores armónicos desacoplados.

(d) Introduzca relaciones de conmutación adecuadas, así como operadores de creación y destrucción de cuantos de oscilación, que llamaremos *oscilones*. Obtenga el Hamiltoniano como una suma de operadores "número de oscilones" de cierta energía.

(e) Construya los estados coherentes para este sistema.

(f) Encuentre el valor de expectación del operador "desplazamiento de la cuerda" en el estado coherente recién construido. El operador desplazamiento para un oscilador armónico es $D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$.

P2. Ecuación de Schrödinger relativista y el átomo de hidrógeno: Klein-Gordon

(a) Muestre que con la ecuación de Schrödinger no relativista, $i\hbar\partial_t\psi(\vec{x},t) = H\psi(\vec{x},t)$, se tiene

$$\frac{d}{dt}\int d\vec{x}\psi^*(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) = 0. \tag{2}$$

Esto permite interpretar $\rho = |\psi(\vec{x},t)|^2$ como una densidad de probabilidad que satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0, \tag{3}$$

con $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$ para una partícula de spin 0 libre.

En los primeros intentos para encontrar una ecuación para una partícula cuántica relativista se propuso la ecuación de Klein-Gordon (ecuación de Schrödinger relativista). Partiendo de la relación relativista $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, se promueven E y p de la siguiente manera:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\hbar\nabla, \tag{4}$$

obteniendo la ecuación

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi(\vec{x},t) = [(-i\hbar c\nabla)^2 + m^2c^4]\psi(\vec{x},t). \tag{5}$$

(b) Explique por qué la ecuación (2) ya no se satisface para la ecuación de Schrödinger relativista. Esto nos dice que no podemos interpretar ρ como una densidad de probabilidad. Muestre sin embargo, que si se define $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*)$, se sigue satisfaciendo la ecuación de continuidad, aunque este ρ tampoco debe ser interpretado como una densidad de probabilidad porque puede ser negativo.

Se pueden incluir los potenciales electromagnéticos $\vec{A}(\vec{r},t)$ y $\phi(\vec{r},t)$ en la ecuación de onda si es que notamos que ϕ y $(1/c)\vec{A}$ transforman igual bajo transformaciones de Lorentz que $\vec{E}$ y $\vec{p}$ respectivamente. De esta manera se obtiene

$$(E - e\phi)^2 = (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2c^4. \tag{6}$$

(c) La ecuación anterior es separable si $\vec{A}$ y ϕ son independientes del tiempo. Obtenga la ecuación independiente del tiempo al usar un ansatz $\psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$.

(d) Al utilizar separación de variables $\psi(\vec{r},t) = R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ en la ecuación de Schrödinger no relativista independiente del tiempo se obtiene la ecuación radial

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r) - E]R = l(l+1)R. \tag{7}$$

Determine la ecuación radial al utilizar el ansatz $u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ para la ecuación independiente del tiempo que encontró en (c), considerando el caso particular en que $\vec{A} = 0$ y $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$.

(e) Para $e\phi = -Ze^2/r$, muestre que haciendo el cambio de variable $v(r) = rR(r)$ y $\rho = \alpha r$ se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1) - \gamma^2}{\rho^2}\right] v. \tag{8}$$

Determine α, ρ_0, γ. Esto tiene la misma forma que la ecuación radial no relativista salvo por la presencia de γ^2. A partir de las constantes determinadas, encuentre una expresión para la energía E.

(f) Haga un análisis análogo al que se lleva a cabo con la ecuación no relativista, para encontrar soluciones que sean finitas en $\rho = 0$ y $\rho = \infty$. Muestre que existen solamente si

$$\rho_0 = 2(n' + s + 1), \tag{9}$$

donde n' es un entero no negativo y s es la solución no negativa de la ecuación $s(s+1) = l(l+1) - \gamma^2$. Muestre que para $l = 0$ ambos valores de s son negativos. De la solución a la ecuación cuadrática, se elige la raíz positiva para cualquier l. Escriba ρ_0 explícitamente. Luego expanda la energía en potencias de γ^2 hasta γ^4. Use que $n = n' + l + 1$ es el número cuántico principal. ¿Qué es el primer término? Compare el segundo término con la energía no relativista del átomo de hidrógeno, $-mZ^2e^4/2\hbar^2 n^2$. ¿Qué sería el tercer término?

P3. Ecuación de Schrödinger relativista y el átomo de hidrógeno: Dirac

Debido a lo discutido en la parte (a) de la pregunta anterior, la derivada temporal de la función de onda no puede estar libre para fijar con condiciones iniciales. Luego queremos una ecuación lineal en el tiempo, y consiguientemente por invarianza de Lorentz, lineal en derivadas espaciales. Así, Paul Dirac propuso en 1928

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi = (c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta)\Psi. \tag{10}$$

(a) Imponiendo que $E^2 - (p^2c^2 + m^2c^4) = 0$, verifique que la ecuación anterior es consistente con esto solo si

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \ \ (i \neq j), \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0. \tag{11}$$

Por lo tanto, $\vec{\alpha}$ y β no pueden ser números ordinarios. Resulta que

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{12}$$

con I la identidad de 2×2 y $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli.

(b) A partir de la ecuación de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -ic\hbar\vec{\alpha}\cdot\nabla\Psi + mc^2\beta\Psi \tag{13}$$

encuentre una ecuación de continuidad, definiendo con ella una densidad y una corriente.

(c) Busque soluciones en ondas planas $\Psi_j = u_j e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, con $E = \hbar\omega$ y $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Obtenga las 4 soluciones con sus respectivas energías en términos del momentum. Discuta el resultado de acuerdo a lo visto en clases.

(d) Haciendo las sustituciones habituales, tenemos que para un electrón en presencia del campo electromagnético,

$$[E - e\phi - \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) - mc^2\beta]\Psi = 0. \tag{14}$$

Interesa estudiar el átomo de hidrógeno. Luego consideramos $\vec{A} = 0$ y $H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta + V(r)$. Calcule los conmutadores $[H, \vec{L}]$ y $[H, \vec{L} + \hbar\vec{\sigma}/2]$. ¿Cuál será cantidad conservada? Defina $\vec{J} \equiv \vec{L} + \hbar\vec{\sigma}/2$, $p_r \equiv (\vec{r} \cdot \vec{p} - i\hbar)/r$, $\alpha_r \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{r}/r$, $\hbar K \equiv \beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar)$. Pruebe que

(i) $[K, \alpha_r] = [K, \beta] = [K, p_r] = 0$.

(ii) $\hbar^2 K^2 = J^2 + \hbar^2/4$. Encuentre los autovalores de K.

(iii) $\alpha_r^2 = \beta^2 = 1$, $\alpha_r\beta + \beta\alpha_r = 0$.

(iv) $H = c\alpha_r p_r + \frac{i\hbar c}{r}\alpha_r\beta K + V(r) + mc^2\beta$.

Las matrices que satisfacen las relaciones anteriores (i) y (iii) pueden ser tomadas en la forma

$$\alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

(e) Escriba la ecuación de autovalores como $H\Phi = E\Phi$, considerando (una vez especificados los autovalores de K en la ecuación)

$$\Phi(r) = \begin{pmatrix} F(r)/r \\ G(r)/r \end{pmatrix} \tag{16}$$

y deduzca las siguientes ecuaciones para F y G:

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{K}{\rho}\right) G - \left(\frac{a_-}{a} + \frac{V}{\hbar ca}\right) F = 0, \quad \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{K}{\rho}\right) F - \left(\frac{a_+}{a} - \frac{V}{\hbar ca}\right) G = 0, \tag{17}$$

donde $a_\pm \equiv (mc^2 \pm E)/\hbar c$, $a = \sqrt{a_+ a_-}$, $\rho = ar$.

(f) Considere el potencial Coulombiano $V(r) = -Ze^2/r$. Defina $\gamma \equiv Ze^2/\hbar c$. Busque soluciones del tipo $F(\rho) = f(\rho)e^{-\rho}$, $G(\rho) = g(\rho)e^{-\rho}$, con $f(\rho) = \rho^s(d_0 + d_1\rho + ...)$, $g(\rho) = \rho^s(b_0 + b_1\rho + ...)$. Llevando a cabo un análisis análogo al que se hace con el átomo de hidrógeno no relativista (solo que ahora tiene dos ecuaciones en vez de una, para el doble de coeficientes), encuentre condiciones tal que las soluciones sean no triviales y físicamente aceptables. Debería obtener como resultado final:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{(s+n')^2}}}, \tag{18}$$

con $n' = 0, 1, 2, ...$ y $s = s(K)$ como función del autovalor del operador K considerado.

(g) Expanda el resultado anterior en serie de potencias de γ hasta orden γ^4 inclusive (¿cuándo es válido hacer esto?). Describa los términos que aparecen.

(h) A partir de la ecuación (14), infiera el momento magnético del electrón.