Auxiliar 6 - Principio Variacional y $H = H(t)$

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

P1. Suponga que tiene un sistema cuántico con Hamiltoniano H_0 con dos autoestados no degenerados, ψ_a y ψ_b con autoenergías E_a y E_b ($E_a < E_b$). Ahora aplicamos una perturbación H' con los siguientes elementos de matriz:

$$\langle \psi_a | H' | \psi_a \rangle = \langle \psi_b | H' | \psi_b \rangle = 0; \quad \langle \psi_a | H' | \psi_b \rangle = h. \tag{1}$$

(a) Encuentre las autoenergías exactas del Hamiltoniano perturbado.

(b) Estime las energías del sistema perturbado usando teoría de perturbaciones de segundo orden.

(c) Estime la energía del estado fundamental del sistema perturbado usando el principio variacional, con una función de prueba de la forma $\psi = \cos(\phi)\psi_a + \sin(\phi)\psi_b$, donde ϕ es un parámetro ajustable. Note que escribir la combinación lineal de esta forma es una manera de garantizar que la función esté normalizada.

(d) Compare sus respuestas de (a), (b), y (c). ¿Por qué el principio variacional es tan preciso en este caso?

P2. Si el fotón tuviese una masa m no nula, el potencial Coulombiano sería reemplazado por el potencial de Yukawa,

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}, \tag{2}$$

donde $\mu = mc/\hbar$. Idee una función de prueba que le permita estimar la energía de ligazón de un átomo de hidrgógeno con este potencial. Suponga que $\mu a << 1$, y entregue su estimación hasta orden $(\mu a)^2$.

P3. Considere un sistema cuántico cualquiera de N niveles, en que el Hamiltoniano total está compuesto por una parte independiente del tiempo y otra parte dependiente del tiempo, $H(t) = H_0 + H'(t)$. El estado del sistema en el tiempo t se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{N} c_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}, \quad \text{donde } H_0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle. \tag{3}$$

(a) Usando la ecuación de Schödinger encuentre la ecuación diferencial para $c_m(t)$. Defina $\omega_{mn} = (E_n - E_m)/\hbar$.

(b) Definiendo el vector columna $c(t) = (c_1(t), ..., c_N(t))^T$, escriba la ecuación diferencial $\dot{c}(t) = W(t)c(t)$ y escriba cuáles son los elementos de la matriz $W(t)$. A continuación, integre esta ecuación diferencial y reemplace la solución en ella misma, tantas veces como usted estime necesario. ¿Qué términos debe considerar para tener una aproximación de orden cero, primer orden y segundo orden (en H')?

(c) A continuación considere dos sistemas independientes cada uno con un Hamiltoniano independiente del tiempo, H_1 y H_2. Suponga que se agrega una interacción entre ambos sistemas descrita por el Hamiltoniano H^{int}. El Hamiltoniano total será $H = H_1 + H_2 + H^{int} \equiv H_0 + H^{int}$.

Así como existe el cuadro de Schrödinger o el cuadro de Heisenberg, también existe el *cuadro de interacción*. En él, tanto la matriz densidad como cualquier otro operador $A(t)$ evoluciona en el tiempo, pero de manera diferente:

$$\rho_I(t) \equiv U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0), \tag{4}$$

$$A_I(t) \equiv U_0(t, t_0)A(t_0)U_0^\dagger(t, t_0), \tag{5}$$

donde

$$U_0(t,t_0) \equiv e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}; \quad U_I(t,t_0) \equiv U_0^\dagger(t,t_0)U(t,t_0). \tag{6}$$

Encuentre la ecuación diferencial que satisface $\rho_I(t)$, y expanda la ecuación de la misma manera como lo hizo en (b). ¿Qué significa en este caso hacer una aproximación de orden n?