

P3 Los tres estados deben estar ocupados. Para partículas distinguibles, no hay restricciones de paridad sobre los estados $\Rightarrow \Psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$ es una posibilidad; también podemos permutar los ψ , e.g. $\psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\psi_c(x_3)$. Notamos que estamos suponiendo que podemos separar el espacio de Hilbert en un espacio producto!

Para bosones, se debe cumplir $\Psi(x_1, x_2, x_3) = \Psi(x_2, x_1, x_3) = \Psi(x_2, x_3, x_1) = \dots$

Es decir, permutar dos partículas deja invariante a Ψ . Para construir el estado, simplemente comenzamos con $\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$ y hacemos todas las permutaciones posibles, sumando todo al final; de esta forma hacer e.g. $x_1 \leftrightarrow x_2$ no cambia Ψ .

$$\Psi = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\psi_c(x_1) + \psi_a(x_3)\psi_b(x_2)\psi_c(x_1)$$

$$+ \psi_a(x_3)\psi_b(x_1)\psi_c(x_2) + \psi_a(x_1)\psi_b(x_3)\psi_c(x_2), \text{ (no normalizada). Para fermiones,}$$

el intercambio de dos partículas cambia el signo de $\Psi \Rightarrow \Psi(x_1, x_2, x_3) = -\Psi(x_2, x_1, x_3) = \Psi(x_3, x_1, x_2)$
 $\Rightarrow$ hacemos una suma de las permutaciones, pero alternando los signos con cada intercambio de partículas.

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\psi_c(x_1) - \psi_a(x_3)\psi_b(x_2)\psi_c(x_1) \\ + \psi_a(x_3)\psi_b(x_1)\psi_c(x_2) - \psi_a(x_1)\psi_b(x_3)\psi_c(x_2)$$

Esto último se puede expresar con el determinante de Slater:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_a(x_1) & \psi_b(x_1) & \psi_c(x_1) \\ \psi_a(x_2) & \psi_b(x_2) & \psi_c(x_2) \\ \psi_a(x_3) & \psi_b(x_3) & \psi_c(x_3) \end{vmatrix}$$

y este determinante funciona en casos más generales: (con más estados)

P2 Una enana blanca no colapsa por presión de degeneración. Primero vemos la presión debida a la fuerza gravitacional: modelamos la enana blanca como una esfera uniforme de masa M , y radio R . La energía potencial gravitacional en esta configuración es E_g , que encontramos "construyendo" la estrella con capas. Si hay una masa m de estrella, el cambio de energía al traer una cáscara dm del infinito es $dE_g = -\frac{Gm dm}{r}$.



$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr$$

$$\Rightarrow dE_g = -\frac{G}{3}(4\pi)^2 \rho^2 r^4 dr$$

$$E_g = \int_0^R dE_g = -\frac{(4\pi)^2 G \rho^2}{15} R^5. \text{ Con la energía podemos obtener la presión usando } P = -\partial E / \partial V$$

Entonces expresamos E_g en términos de $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $R = \left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{1/3}$

$$\Rightarrow E_g = -\frac{(4\pi)^2 G \rho^2}{15} R^5 = -\frac{(4\pi)^2 G}{15} \cdot \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^2 R^5 = -\frac{(4\pi)^2 G M^2}{15 \cdot (4\pi)^2 R} \cdot 9 = -\frac{3}{5} G M^2 \left(\frac{4\pi}{3V}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow P_g = -\partial E_g / \partial V = -\frac{1}{5} G M^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} V^{-4/3} \quad \text{Ahora, presión de degeneración. Modelamos}$$

los electrones como si están en un pozo infinito de volumen V . Como se vio en clases, la energía de cada electrón es $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$ en un cubo de lado L , y por culpa del principio de exclusión de Pauli (los e^- son fermiones!), no todos pueden estar en el estado fundamental, $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$, por ejemplo. Si hay $N \gg 1$ electrones, la energía de Fermi $E_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$ es la energía del electrón en el estado más excitado, si el sistema total está en la mínima posible energía. Esta energía total se encuentra integrando hasta E_F :

$$E_{\text{Tot}} = \int E_n d^3n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \cdot \frac{1}{8} \int n^2 d^3n = \frac{\pi^3 \hbar^2}{20mL^2} R_F^5$$

radio de Fermi
(esfera en espacio n)



$$= \frac{\pi^3 \hbar^2}{20mL^2} \cdot \left[\frac{E_F}{\pi^2 \hbar^2} \cdot 2mL^2 \right]^{5/2}$$

$$= \frac{\pi^3 \hbar^2}{20mL^2} \left[\frac{\pi^2 \hbar^2}{\pi^2 \hbar^2 \cdot 2m} \cdot \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} \cdot 2mL^2 \right]^{5/2} = \frac{\pi^3 \hbar^2 V}{20m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{5/3}$$

Pero en cada "sitio" en

espacio n (o en cada estado), pueden haber dos electrones (por el spin)

$$\Rightarrow E_{\text{Tot}} = \frac{\pi^3 \hbar^2}{10m} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} V^{-2/3} \Rightarrow P_{\text{degeneración}} = \frac{\pi^3 \hbar^2}{10m} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} \cdot \frac{2}{3} V^{-5/3} = \frac{\pi^3 \hbar^2}{15m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{5/3}$$

Igualando las presiones para alcanzar equilibrio,

$$\frac{1}{5} G M^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} V^{-4/3} = \frac{\pi^3 \hbar^2}{15m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{5/3} \Rightarrow V_{\text{eq}}^{1/3} = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} \cdot \frac{\pi^3 \hbar^2}{3m} \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{G M^2}$$

$$\text{El radio de equilibrio entonces es } R_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} V_{\text{eq}}^{1/3} = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} \cdot \frac{\pi^3 \hbar^2}{3m} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{G M^2}$$

La estrella está hecha de átomos. Consideramos que $M = N_n m_n$, con N_n y m_n

la cantidad y masa de nucleones. Aprox $N_e = \frac{1}{2} N_n$

$$R_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \cdot \frac{\pi^3 \hbar^2}{4^{2/3} \cdot 3m_e} \cdot \frac{N_e^{5/3}}{G m_n^2 (2N_e)^2}$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{9}\right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{4^{2/3} \cdot 4 m_e m_n^2 G} N_e^{-1/3} = \left(\frac{\pi}{96}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e m_n^2 G} N_e^{-1/3} \quad N_e \approx \frac{\text{masa estrella}}{\text{masa protones}}$$

$$\Rightarrow N_e \approx \frac{10^{30}}{10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{kg}}} = 10^7$$

?
 Sol

$$\Rightarrow R_{\text{eq}} \approx 10^4 \text{ km}$$

Radio de una enana blanca de una masa solar

∴

a) Si son distinguibles, podemos decir que

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_n(x_1) \psi_l(x_2)$$

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1 \rangle^2 + \langle x_2 \rangle^2 - 2 \langle x_1 x_2 \rangle$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \int |\psi_n(x_1)|^2 x_1^2 dx_1 \int |\psi_l(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_n$$

Similar, $\langle x_2^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_l$.

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int x_1 |\psi_n(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_l(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_n \langle x \rangle_l$$

$$\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_n + \langle x^2 \rangle_l - 2 \langle x \rangle_n \langle x \rangle_l$$

Ahora, dado que están en el pozo de potencial infinito (ancho a),

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (0 < x < a)$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle_n = \frac{2}{a} \int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx, \text{ lo podemos hacer por}$$

partes. Recuerdo: $\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(ax) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1 - \cos(2ax)}{2} dx$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{4a}(\sin(2ax_2) - \sin(2ax_1))$$

$$\Rightarrow \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{a}{2} \Rightarrow \int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{a^3}{2} - \int_0^a x \left(\frac{1}{2}x - \frac{a}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) \right) dx$$

$$= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a}{2n\pi} \int_0^a x \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx = \frac{a^3}{6} + \frac{a}{2n\pi} \left[a \cdot \frac{-a}{2n\pi} + \int_0^a \frac{a}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx \right]$$

$$= \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{4(n\pi)^2} \Rightarrow \langle x^2 \rangle_n = a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right)$$

$$\langle x \rangle_n = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{2}{a} \left[\frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{1}{2}x - \frac{a}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx \right] = \frac{2}{a} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \int_0^a \frac{a}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx \right]$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle_n = \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{4} \right) = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = a^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{l^2} \right) \right) - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$= \left[a^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 l^2} \right) \right]$$

ii) Si son bosones idénticos, $\psi(x_1, x_2) = \psi_n(x_1)\psi_l(x_2) + \psi_l(x_1)\psi_n(x_2)$

$$\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_n + \langle x^2 \rangle_l - 2\langle x \rangle_n \langle x \rangle_l - 2|\langle x \rangle_{nl}|^2$$

(Griffiths 5.1.2, o bien materia vista en clases)

Donde $\langle x \rangle_{nl} \equiv \int x \psi_n^*(x) \psi_l(x) dx$

Sólo falta calcular esto :

$$\frac{2}{a} \int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) dx = \langle x \rangle_{nl}$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{2} x \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{a} - \frac{l\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{a} + \frac{l\pi x}{a}\right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a x \left[\cos\left[\left(\frac{n\pi}{a} - \frac{l\pi}{a}\right)x\right] - \cos\left[\left(\frac{n\pi}{a} + \frac{l\pi}{a}\right)x\right] \right] dx$$

$$= \frac{1}{a} \left[a \cdot \frac{a}{n\pi - l\pi} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi - l\pi}{a} x\right) \right\} - a \cdot \frac{a}{n\pi + l\pi} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi + l\pi}{a} x\right) \right\} \right. \\ \left. - \int_0^a \frac{a}{n\pi - l\pi} \cdot \sin\left((n\pi - l\pi) \cdot \frac{x}{a}\right) dx + \int_0^a \frac{a}{n\pi + l\pi} \cdot \sin\left((n\pi + l\pi) \cdot \frac{x}{a}\right) dx \right]$$

$$= \frac{a}{(n\pi - l\pi)^2} \cdot \cos\left((n\pi - l\pi) \cdot \frac{x}{a}\right) \Big|_0^a - \frac{a}{(n\pi + l\pi)^2} \cdot \cos\left((n\pi + l\pi) \cdot \frac{x}{a}\right) \Big|_0^a$$

$$= \frac{a}{(n\pi - l\pi)^2} \cdot \left\{ \cos(\pi(n-l)) - 1 \right\} - \frac{a}{(n\pi + l\pi)^2} \cdot \left\{ \cos(\pi(n+l)) - 1 \right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n+l \text{ par} \\ 2a \left[\frac{1}{(n\pi + l\pi)^2} - \frac{1}{(n\pi - l\pi)^2} \right] & \text{si } n+l \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces, vemos que si $n+l$ es impar,

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = a^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 l^2} \right) - 8 \left(\frac{a}{\pi^2} \right)^2 \left[\frac{1}{(n+l)^2} - \frac{1}{(n-l)^2} \right]^2$$

$$= \left[a^2 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 l^2} \right) - 128 \left(\frac{a}{\pi^2} \right)^2 \cdot \frac{n^2 l^2}{(n^2 - l^2)^4} \right]$$

Esto no aparece para $n+l$ par

ii) Para fermiones todo es igual, excepto que se cambia el signo del último término:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = a^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 l^2} \right) + 128 \cdot \left(\frac{a}{\pi^2} \right)^2 \cdot \frac{n^2 l^2}{(n^2 - l^2)^4}$$

sólo presente para $n+l$ impar

b)

i) Si las partículas son distinguibles, no hay restricciones de simetría sobre todos los estados. Podemos tener todas las permutaciones posibles

$$\psi_a(\vec{x}_1) \psi_b(\vec{x}_2) \psi_c(\vec{x}_3)$$

Cuántas formas hay de colocar ψ_a, ψ_b, ψ_c en el arreglo, si podemos repetirlos, y el orden importa?

$$3^3 = \boxed{27} \quad (\text{y son 3 wpos})$$

(Permutación ordenada, con repeticiones)