Universidad de Chile
Departamento de Física
FI7002 - Mecánica Cuántica II

Tarea 4

Fecha de Entrega: 21 de noviembre

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

P1. (20%) Partículas idénticas.

(a) Suponga que tiene tres partículas, y tres estados de una partícula $\psi_a(x), \psi_b(x), \psi_c(x)$ distintos. ¿Cuántos estados distintos se pueden construir si las partículas son distinguibles? Bosones idénticos? Fermiones idénticos? Note que no *deben* estar en estados distintos las partículas (e.g. $\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\psi_a(x_3)$ es una opción para partículas distinguibles).

(b) Dos partículas idénticas de masa m están en una caja uni-dimensional de largo L. Se mide la energía del sistema, y se encuentra $E = \hbar^2\pi^2/mL^2$. ¿Cuál es (o son) la función de onda del sistema? Haga lo mismo si se mide $E = 5\hbar^2\pi^2/2mL^2$. Suponga que los únicos grados de libertad son orbitales.

P2. (20%) Partículas idénticas, pt.2. Demuestre que si un estado cuántico describe partículas idénticas y resulta ser simétrico bajo intercambio de partículas, lo será *siempre* (y análogo si es antisimétrico). Es decir, los bosones son bosones y los fermiones son fermiones.

Para esto, le será útil considerar el operador de intercambio P_{12} que actúa sobre la base posición de la forma $P_{12}\,|x_1, x_2\rangle = |x_2, x_1\rangle$. Muestre que sus autovalores son ± 1; esto es lo que nos define si un estado es simétrico o antisimétrico. Luego, analice cómo se comportan el Hamiltoniano H y el propagador U (para dos partículas idénticas) bajo la acción $H \to P_{12}HP_{12}$, $U \to P_{12}UP_{12}$. Dado esto, ¿qué ocurre con un autoestado de P_{12}, y con su autovalor, a medida que pasa el tiempo? Luego concluya lo pedido. Le servirá demostrar ciertas propiedades típicas de P_{12}, como que es unitario, y que su acción sobre otra base $|\omega_1, \omega_2\rangle$ es análoga a la de X, i.e., $P_{12}\,|\omega_1, \omega_2\rangle = |\omega_2, \omega_1\rangle$.

P3. (30%) La molécula ion hidrógeno, con dos protones y un electrón, puede existir. Esto lo vamos a mostrar usando el principio variacional.

(a) Muestre el principio variacional.

(b) Reproduzca los resultados (llenando los pasos intermedios) de la sección 7.3 del libro de Griffiths. ¿Cuál es la energía de ligazón de esta molécula, que arroja su cálculo?

(c) En el paso anterior, llegó a una función $F(x)$. Haga un gráfico de la función (con un computador). Su segunda derivada en el punto de equilibrio se puede usar para estimar la frecuencia natural de vibración ω de los dos protones en la molécula; explique por qué. Si la energía del estado basal de este oscilador, $\hbar\omega/2$, es mayor que la energía del enlace, el sistema se desarma. Muestra que la energía del oscilador es suficientemente pequeña tal que esto no ocurre, y estime cuántos niveles de vibración (tal que el sistema esté confinado/enlazado) hay. Use métodos numéricos, y entregue su código por mail o impreso.

P4. (30 %) Se puede extender la teoría vista en clases (5.3.1 Griffiths) de un gas de electrones libres al dominio relativista reemplazando la energía cinética clásica $E = p^2/2m$ por la fórmula relativista $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$. El momentum está relacionado con el vector de onda de la manera usual: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. En particular, en el límite ultrarelativista, $E \approx pc = \hbar kc$.

(a) Reemplace la energía utilizada en clases $\hbar^2k^2/2m$ para calcular la energía total del gas por la expresión ultrarelativista $\hbar kc$ y calcule la energía total en este límite.

(b) En clases se estudió el balance de la presión de radiación (o de degeneración de los electrones) con la presión gravitacional que determina el equilibrio de una enana blanca. Repita los cálculos para el gas de electrones ultrarelativista: escriba la energía total de los electrones en términos del radio R, el número de nucleones (protones y neutrones) N, el número de electrones por nucleón q, y la masa del electrón m, y escriba la energía gravitacional de una esfera de densidad uniforme en términos de G (constante de Newton), R, N, y M (masa de un nucleón). Note que en este caso no hay un mínimo estable para la energía total, independiente de R: si la energía total es positiva, las fuerzas de degeneración superan a las gravitacionales y la estrella se expandirá, mientras que si es negativa las fuerzas gravitatorias dominan y la estrella colapsa. Encuentre el número de nucleones N_c tal que el colapso gravitacional ocurra para $N > N_c$. Este se llama el límite de Chandrasekhar. ¿Cuál es la masa estelar correspondiente? (Dé su respuesta en términos de la masa solar.) Las estrellas más pesadas que esto no formarán enanas blancas, sino que colapsarán más allá, convirtiéndose en estrellas de neutrones.

(c) A muy altas densidades, el decaimiento beta inverso $e^- + p^+ \to n + \nu$ convierte prácticamente todos los protones y electrones en neutrones (radiando neutrinos, que se llevan energía consigo). Eventualmente la presión de degeneración de neutrones estabiliza el colapso, tal y como la degeneración de electrones lo hace para una enana blanca. Calcule el radio de una estrella de neutrones con la masa del sol. También calcule la energía de Fermi (de neutrones), y compárela con la energía de reposo de un neutrón. ¿Es razonable tratar una estrella de neutrones de manera no relativista?