

Tarea 3

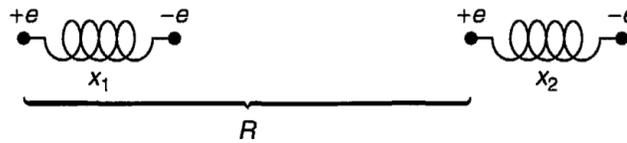
Fecha de Entrega: 8 de noviembre

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Nicolás Valdés

P1. (20%) En este problema modelamos la interacción de van der Waals! Considere dos átomos separados por una distancia R . Dado que son neutros eléctricamente, podría pensar que no hay fuerza entre ellos; pero si son polarizables, hay una interacción débil. Para modelar este sistema, imagine cada átomo como un electrón de masa m y carga $-e$, conectado mediante un resorte de constante k al núcleo de carga $+e$. Suponemos que los núcleos son muy masivos y no se mueven. Las partículas son distinguibles. El Hamiltoniano no perturbado del sistema es

$$H^0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_2^2. \quad (1)$$



- (a) Determine el Hamiltoniano H' debido a la interacción de Coulomb entre todas las partículas. Muestre que si $|x_1|$ y $|x_2|$ son mucho menores que R ,

$$H' \simeq -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (2)$$

- (b) Muestre que al hacer un cambio de variables $x_{\pm} = (x_1 \pm x_2)/\sqrt{2}$, $p_{\pm} = (p_1 \pm p_2)/\sqrt{2}$ (justifique la validez del cambio), el Hamiltoniano total $H = H^0 + H'$ se separa en dos osciladores armónicos

$$H = \left[\frac{p_+^2}{2m} + \frac{1}{2} \left(k - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_+^2 \right] + \left[\frac{p_-^2}{2m} + \frac{1}{2} \left(k + \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3} \right) x_-^2 \right]. \quad (3)$$

- (c) Argumente, recordando el producto tensorial de espacios, que la energía del estado fundamental toma la forma $E = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-)$. Encuentre ω_{\pm} . Sin la interacción de Coulomb, hubiera sido $E_0 = \hbar\omega_0$, con $\omega_0\sqrt{k/m}$. Suponga que $k \gg (e^2/2\pi\epsilon_0 R^3)$ (justificándolo físicamente), y muestre que

$$\Delta V \equiv E - E_0 \simeq -\frac{\hbar}{8m^2\omega_0^3} \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{R^6}. \quad (4)$$

Conclusión: Hay un potencial atractivo entre los átomos, proporcional a la inversa de la sexta potencia de la distancia de separación. Esta es la interacción de van der Waals entre dos átomos neutros.

- (d) Reproduzca esto con teoría de perturbaciones. *Indicación:* Los estados no perturbados son de la forma $\psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)$ (argumente por qué), con $\psi_n(x)$ la autofunción para un oscilador con masa m y constante elástica k .

P2. (20%) Estudie el problema del efecto Zeeman intermedio, es decir, cuando Zeeman y la estructura fina son del mismo orden, por lo tanto se tratan perturbativamente al mismo tiempo. Encuentre todas las correcciones a la energía del nivel $n = 2$ del átomo de hidrógeno. Compruebe que en los límites apropiados se recuperan los valores de la estructura fina en un caso, y los de Zeeman fuerte en otro caso.

P3. (30%) El objetivo de este ejercicio es estudiar un sistema físico simple en el cual podemos calcular exactamente el efecto de un campo magnético uniforme. Esto nos va a permitir comparar la importancia del término “diamagnético” y el “paramagnético”, y estudiar la modificación de la función de onda debido al término diamagnético. (Quizás sirva ver complementos D_{VI} , B_{VII} y \mathbf{D}_{VII} de Cohen-Tannoudji, Vol. 1). Considere un oscilador armónico isotrópico en 3 dimensiones, de masa μ y frecuencia ω_0 :

$$H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2\mathbf{R}^2. \quad (5)$$

- (a) Determine los niveles de energía de la partícula y las degeneraciones correspondientes. ¿Es posible construir una base de autoestados comunes para H_0 , \mathbf{L}^2 , L_z ?
- (b) Suponga que la partícula, que tiene carga q , se coloca en un campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ uniforme. Definimos $\omega_L = -qB/2\mu$. El Hamiltoniano de la partícula, si escogemos el gauge $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$, es

$$H = H_0 + H_1(\omega_L), \quad (6)$$

donde H_1 es la suma de un operador linealmente dependiente en ω_L (el término paramagnético) y otro cuadráticamente dependiente en ω_L (el término diamagnético). Muestre que los nuevos estados estacionarios del sistema y sus degeneraciones se pueden determinar exactamente.

- (c) Muestre que si $\omega_L \ll \omega_0$, el efecto del término diamagnético es despreciable en comparación al término paramagnético.
- (d) Ahora consideramos el primer estado excitado del oscilador, i.e., los estados cuyas energías tienden a $5\hbar\omega_0/2$ cuando $\omega_L \rightarrow 0$. ¿A primer orden en ω_L/ω_0 , cuáles son las energías en presencia de \mathbf{B} y sus grados de degeneración? Este es el efecto Zeeman para el oscilador armónico. Repita esto para el segundo estado excitado.
- (e) Ahora considere el estado fundamental. ¿Cómo varía su energía como función de ω_L (cuál es el efecto del término diamagnético)? Calcule la susceptibilidad magnética χ de este estado. En presencia de \mathbf{B} , ¿el estado fundamental es autoestado de \mathbf{L}^2 ? De L_z ? De L_x ? Dé la forma de su función de onda y la corriente de probabilidad correspondiente. Muestre que el efecto de \mathbf{B} es comprimir la función de onda en torno al eje z (en una razón $[1 + (\omega_L/\omega_0)^2]^{1/4}$), e inducir una corriente.

P4. (20%) Hay dos partículas idénticas, libres, de masa m . Suponga que se mueven en una dimensión y no considere spin. Cada partícula se describe con una función localizada en puntos $+a$ y $-a$. Tome

$$\psi_{\pm}(x) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x \mp a)^2\right]. \quad (7)$$

- (a) Caracterice β en términos de a para que cada partícula esté bien localizada. Escriba la función de onda del sistema; recuerde que debe estar normalizada.
- (b) Calcule el valor de expectación de la energía.
- (c) Muestre que si las dos partículas son fermiones, hay una fuerza de repulsión efectiva. Compare con la fuerza que aparece para dos bosones.

- P5.** (10%) La característica más notoria del espectro del hidrógeno en la región visible es la línea roja de Balmer, que viene desde la transición $n = 3$ a $n = 2$. Calcule la longitud de onda y frecuencia de esta línea de acuerdo a la teoría de Bohr. La estructura fina separa esta línea en varias líneas muy cercanas entre sí. La pregunta es: ¿Cuántas son, y cuáles son las diferencias de energía entre ellas? Se pide el resultado numérico explícito. Primero determine cuántos subniveles aparecen desde $n = 2$, y encuentre la corrección a la autoenergía a primer orden para cada uno de ellos, en eV. Luego haga lo mismo para $n = 3$. Dibuje un diagrama de niveles de energía mostrando todas las posibles transiciones desde $n = 3$ hacia $n = 2$. La energía liberada (en la forma de un fotón) es $(E_3 - E_2) + \Delta E$, donde la primera parte es común para todas ellas, y ΔE (debido a la estructura fina) cambia de una transición a otra. Encuentre ΔE para cada transición. Finalmente, convierta a frecuencia del fotón emitido y determine el espaciamiento entre líneas espectrales adyacentes (en Hz) – no se pide la diferencia de frecuencia entre cada línea y la línea no perturbada (que no es observable), sino que la diferencia de frecuencias entre líneas consecutivas.