# Tarea 2

Fecha de Entrega: 24 de octubre

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

**P1.** (30%) Tenemos una oscilador armónico, es decir una partícula en un potencial $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Agregamos una perturbación débil, caracterizada por un potencial $\Delta V = \lambda \sin(\kappa x)$.

(a) Dé un ejemplo donde podríamos encontrar una perturbación así (aún si por solo un momento). Indique cómo caracterizar más precisamente que $\Delta V$ sea pequeño en términos de las cantidades del problema.

(b) Determine la corrección al estado fundamental (a primer orden).

(c) Calcule el valor de expectación de la posición en el estado determinado en (b). Analice su resultado.

*Indicaciones:* Recuerde que puede expresar $x$ en términos de operadores de creación y destrucción. Recuerde la identidad $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}e^{-[\mathbf{A},\mathbf{B}]/2}$.

**P2.** (20%) **Suma de momentum angular.**

(a) Considere dos partículas, ambas de spin 1, en el estado

$$|s_1 = 1, m_1 = 1; s_2 = 1, m_2 = 0\rangle \,. \tag{1}$$

Determine la probabilidad de encontrar al sistema en un autoestado del spin total $\mathbf{S}^2$ con $s = 1$, y la probabilidad de encontrarlo con $s = 2$.

(b) Considere un sistema de tres electrones (suponga que son distinguibles).

(i) Encuentre los autovalores de spin total, y encuentre un conjunto de autoestados de los operadores spin total $\mathbf{S}^2$ y $S_z$.

(ii) Ignore grados de libertad espaciales, y asuma que el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \alpha(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{2x}S_{3x} + S_{2y}S_{3y} + S_{1x}S_{3x} + S_{1y}S_{3y}) \tag{2}$$

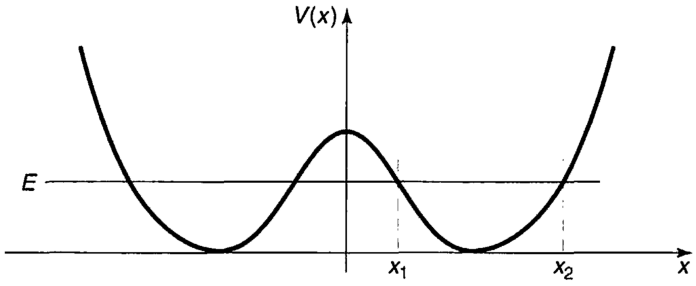
Determine las energías permitidas del sistema.

**P3.** (30%) Considere el caso de un doble pozo potencial simétrico como se muestra en la figura. Nos interesan los estados ligados con $E < V(0)$.

(a) Escriba las funciones de onda de WKB en las regiones $(i)$ $x > x_2$, $(ii)$ $x_1 < x < x_2$, $(iii)$ $0 < x < x_1$. Imponga las fórmulas de conexión en $x_1$ y $x_2$ para mostrar que

$$\psi(x) \simeq \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} |p(x')|dx'\right], & (i) \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_2} p(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right], & (ii) \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \left(2\cos(\theta)\exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_1} |p(x')|dx'\right] + \sin(\theta)\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_1} |p(x')|dx'\right]\right), & (iii) \end{cases} \tag{3}$$

donde $\theta \equiv \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$.




(b) Como $V(x)$ es simétrico, solo necesitamos considerar funciones de onda pares $(+)$ e impares $(-)$. Indique qué implica cada condición de paridad sobre $\psi(0)$ o $\psi'(0)$. Muestre que esto lleva a la condición de cuantización $\tan(\theta) = \pm 2e^{\phi}$, donde $\phi = \frac{1}{\hbar}\int_{-x_1}^{x_1} |p(x)|dx$. Esto determina las aproximadas posibles energías. Notar que $x_1$ y $x_2$ son funciones de $E$, y por lo tanto también lo son $\theta$ y $\phi$.

(c) Estamos particularmente interesados en una barrera central alta y/o ancha, en que $\phi$ es grande y $e^{\phi}$ es muy grande. La condición de cuantización nos dice entonces que $\theta$ debe ser un número muy cercano a un múltiplo semientero de $\pi$. Con esto en mente, escriba $\theta = (n + 1/2)\pi + \varepsilon$, con $|\varepsilon| << 1$, y muestre que la condición de cuantización es

$$\theta \simeq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \mp \frac{1}{2}e^{-\phi} \tag{4}$$

(d) Suponga que cada pozo es una parábola:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2, & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Bosqueje este potencial, encuentre $\theta$ y muestre que

$$E_n^{\pm} \simeq \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \mp \frac{\hbar\omega}{2\pi}e^{-\phi}. \tag{6}$$

*Comentario:* si la barrera central fuera impenetrable ($\phi \to \infty$), tendríamos simplemente dos osciladores armónicos desacoplados, y las energías, $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, serían doblemente degeneradas, ya que la partícula podría estar a la izquierda o la derecha. Cuando la barrera es finita (permitiendo que los pozos se "comuniquen"), la degeneración se levanta. Los estados pares ($\psi_n^+$) tienen levemente menos energía y los impares $\psi_n^-$ tienen ligeramente más energía.

(e) Suponga que la partícula comienza en el pozo derecho, o más precisamente, en un estado de la forma

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^+ + \psi_n^-), \tag{7}$$

que, asumiendo que las fases son elegidas de manera "natural", estará concentrado en el pozo derecho. Muestre que oscila de un lado a otro entre los pozos con un periodo $\tau = \frac{2\pi^2}{\omega}e^{\phi}$.

(f) Calcule $\phi$ para el potencial específico de la parte (d), y muestre que para $V(0) >> E$, $\phi \sim m\omega a^2/\hbar$.

**P4.** (20%) En presencia de un campo eléctrico externo, el electrón en un átomo puede, en principio, escapar por efecto túnel, ionizando el átomo. ¿Es probable que esto ocurra en un experimento típico de efecto Stark? Podemos estimar la probabilidad usando un modelo crudo unidimensional, como se describe a continuación. Imagine una partícula en un pozo de potencial cuadrado finito pero muy profundo (asuma $V_0 >> \hbar^2/ma^2$).

(a) ¿Cuál es la energía del estado fundamental, medida desde la parte inferior del pozo?

(b) Ahora introduzca la perturbación del campo eléctrico $H' = -\alpha x$. Asuma que es relativamente débil ($a\alpha << \hbar^2/ma^2$). Bosqueje el potencial y note que la partícula puede escapar por efecto túnel en la dirección positiva de $x$.

(c) Calcule el factor de túnel $\gamma$ ($T \simeq e^{-2\gamma}$), y estime el tiempo $\tau$ que le tomaría a la partícula escapar.

(d) Ponga (y justifique) algunos números razonables para $V_0$, $a$ y $\alpha$; para esto recuerde que queremos modelar el efecto Stark actuando para un electrón en un átomo, y que podemos usar un campo eléctrico del orden de $10^7$ V/m en un laboratorio razonable. Calcule $\tau$ y compárelo con la edad del universo. Comente.