Aux 2

P1 Sumemos spin $\frac{1}{2}$ y spin 1.

Sabemos de lo visto en clases que $1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$

Consideramos primero el estado

$\boxed{|j=\frac{3}{2}, m=\frac{3}{2}\rangle = |m_1=\frac{1}{2}, m_2=1\rangle}$. Luego,

$$J_-|\tfrac{3}{2};\tfrac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{3}{2}(\tfrac{5}{2})-\tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2})}\,|\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}\,|\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= (S_{1-}+S_{2-})|m_1=\tfrac{1}{2}, m_2=1\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2})-\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})}\,|m_1=-\tfrac{1}{2}, m_2=1\rangle + \hbar\sqrt{1(2)-0}\,|m_1=\tfrac{1}{2}, m_2=0\rangle$$

$$= \hbar\left\{|m_1=-\tfrac{1}{2}, m_2=1\rangle + \sqrt{2}\,|m_1=\tfrac{1}{2}, m_2=0\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|m_1=-\tfrac{1}{2}, m_2=1\rangle + \sqrt{2}\,|m_1=\tfrac{1}{2}, m_2=0\rangle\right\}}$$

$\boxed{|\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\rangle = |m_1=-\frac{1}{2}, m_2=-1\rangle}$. Para obtener $|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\rangle$, aplicar J_+.

Para obtener $|j=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}\rangle$, notamos

$$|j=\tfrac{1}{2}, m=\tfrac{1}{2}\rangle = \alpha|m_1=\tfrac{1}{2}, m_2=0\rangle + \beta|m_1=-\tfrac{1}{2}, m_2=1\rangle$$

Además, $\langle j=\frac{3}{2}, m=\frac{1}{2}|j=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}\rangle = 0$

$$\Rightarrow \alpha\sqrt{2}+\beta=0 \Rightarrow \beta=-\sqrt{2}\alpha \Rightarrow 3\alpha^2=1 \quad \text{(normalizar)}$$

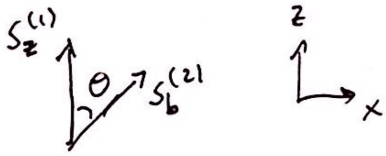
$$\Rightarrow \boxed{|j=\tfrac{1}{2}, m=\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|m_1=\tfrac{1}{2}, m_2=0\rangle - \sqrt{2}\,|m_1=-\tfrac{1}{2}, m_2=1\rangle\right\}}$$

El estado $|j=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}\rangle$ se puede obtener usando J_-, o un método análogo a lo de recién.

P1 Estado singlete $\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+-\rangle - |-+\rangle\}$

Para que sea más simple, escogemos $\hat{a} = \hat{z}$ (s.p.g.)

$\Rightarrow S_a^{(1)} = S_z^{(1)}$. Además, rotamos los ejes para que $S_b^{(2)}$ esté en el plano xz



$S_b^{(2)}$ en términos de otras cosas?

$$S_b^{(2)} = \vec{S}^{(2)} \cdot \hat{b} = \vec{S}^{(2)} \cdot (\hat{z}\cos\theta + \hat{x}\sin\theta) = S_z^{(2)}\cos\theta + S_x^{(2)}\sin\theta$$

$\Rightarrow$ Necesitamos $\langle\psi| S_z^{(1)}(S_z^{(2)}\cos\theta + S_x^{(2)}\sin\theta)|\psi\rangle$.

Entonces nos interesa la acción de S_x sobre autoestados de S_z!

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_x|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$

$$S_x|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

$$\Rightarrow S_z^{(1)}(S_z^{(2)}\cos\theta + S_x^{(2)}\sin\theta)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{S_z^{(1)}(S_z^{(2)}\cos\theta + S_x^{(2)}\sin\theta)\right\}\{|+-\rangle - |-+\rangle\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\hbar}{2}\cdot\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\cos\theta|+-\rangle - \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)\cos\theta|-+\rangle\right.$$
$$\left. + \frac{\hbar}{2}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\sin\theta|++\rangle - \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)\sin\theta|--\rangle\right\}$$

Braketeando con $\langle\psi|$ mueren los $|++\rangle$, $|--\rangle$. Otra representación:

$|\psi\rangle = |0,0\rangle$

$$\Rightarrow \langle S_a^{(1)} S_b^{(2)}\rangle = \langle 0,0|\left(-\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|+-\rangle - |-+\rangle)\rangle$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta\,\langle 0,0|0,0\rangle = \boxed{-\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta}$$

P2

(a) Sabemos $f(x) = \sum \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\Big|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)^n$ $\qquad L_z = -i\hbar\partial_\phi$

$$\Rightarrow f(\phi+\phi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{d\phi_0}\right)^n f(\phi+\phi_0)\Big|_{\phi_0=0} \cdot \phi_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{d\phi}\right)^n f(\phi+\phi_0)\Big|_{\phi_0=0} \cdot \phi_0^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{iL_z}{\hbar}\right)^n f(\phi)\cdot\phi_0^n = e^{iL_z\phi_0/\hbar} f(\phi) \quad //$$

(b) $\chi' = e^{i\varphi\vec{\sigma}\cdot\hat{n}/2}\chi$ $\qquad$ Aquí, $\varphi = \pi$, $\vec{\sigma}\cdot\hat{n} = \sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi' = e^{\frac{i\varphi}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}\chi$ $\qquad \sigma_x^2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Nota: si M es t.q. $M^2 = I$,

$$e^{iM\phi} = 1 + iM\phi + \frac{1}{2}(iM\phi)^2 + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 + \ldots\right) + iM\left(\phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \ldots\right)$$

$$= \cos\phi + iM\sin\phi$$

$$\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_x} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sigma_x\sin\frac{\pi}{2} = i\sigma_x = \boxed{i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}$$

$e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ spin up $\rightarrow$ spin down

(c) $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sigma_y\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(I + i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = |\downarrow_x\rangle$$

(d) $e^{i\pi\sigma_z} = \cos\pi + i\sigma_z\sin\pi = -1$ $\qquad$ <u>Cambia el signo!</u>

(e) $(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^2 = (\sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z)(\sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z)$

$$= \sigma_x^2 n_x^2 + \sigma_y^2 n_y^2 + \sigma_z^2 n_z^2 + n_x n_y\{\sigma_x,\sigma_y\} + n_y n_z\{\sigma_y,\sigma_z\} + n_x n_z\{\sigma_z,\sigma_x\}$$

$$= n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$\Rightarrow e^{i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\phi/2} = \cos\frac{\phi}{2} + i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\frac{\phi}{2}$$

//

P2 $\quad V(x,y) = V_\infty(x) + V_\infty(y) \qquad V_\infty(u) = \begin{cases} 0 & 0 \le u \le a \\ +\infty & u<0,\ u>a \end{cases}$ $\qquad$ Nicolás Valdés

a) $$H = \frac{p^2}{2m} + V(x,y) = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m} + V_\infty(x)}_{H_x} + \underbrace{\frac{p_y^2}{2m} + V_\infty(y)}_{H_y}$$

H_x actúa en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_x$ de funciones normalizables a 1 o δ. Análogo para H_y. Entonces considerando H, podemos decir que actúa en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_y$, si re-definimos $H_x \to H_x \otimes I_y$, $H_y \to I_x \otimes H_y$. Lo importante aquí es que H_x, H_y actuaban sobre espacios distintos, independientes. Dado esto, tendremos $[H_x, H_y] = [H_x \otimes I_y, I_x \otimes H_y] = 0$ $\Rightarrow$ se pueden diagonalizar simultáneamente. Ambos son Hermíticos en su propio espacio $\mathcal{H}_i$, entonces sus autovectores forman una base. Entonces, si en $\mathcal{H}_x$, $H_x|\varphi_i\rangle_x = E_i^x|\varphi_i\rangle_x$, $H_y|\varphi_i\rangle_y = E_i^y|\varphi_i\rangle_y$ en $\mathcal{H}_y$, tendremos que una base en $\mathcal{H}$ será $\{|\varphi_i\rangle_x \otimes |\varphi_j\rangle_y\}$. Si todo elemento de esta base es autovector de H, tendremos que cualquier autovector $|\phi_i\rangle$ de H se puede expresar de esta forma. En efecto,

$$H|\varphi_i\rangle_x|\varphi_j\rangle_y = (H_x \otimes I_y + I_x \otimes H_y)|\varphi_i\rangle_x|\varphi_j\rangle_y = E_i^x|\varphi_i\rangle_x|\varphi_j\rangle_y + E_j^y|\varphi_i\rangle_x|\varphi_j\rangle_y$$

$$= (E_i^x + E_j^y)|\varphi_i\rangle_x|\varphi_j\rangle_y$$

:) . Basta con resolver el problema para los H_i y estamos listos. Solo hago el de H_x, ya que H_y es de la misma forma.

$$H_x|\varphi_n\rangle_x = E_n|\varphi_n\rangle_x \xrightarrow[\text{base posición}]{} \left(E_n + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi_n(x) = 0 \quad \text{en } 0 \le x \le a$$

En $x<0$, $x>a$, tenemos $\varphi_n(x) = 0$.

$$\varphi_n''(x) + \frac{2mE_n}{\hbar^2}\varphi_n(x) = 0$$

Exigimos $E_n > 0$ para que φ_n sea normalizable. Definimos $k_n^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} > 0$

$$\Rightarrow \varphi_n''(x) + k_n^2\varphi_n(x) = 0 \Rightarrow \varphi_n(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

$\overline{|5}$

Ahora imponemos condiciones de borde, y normalizamos φ_n:

$$\varphi(0) = 0 = B, \quad \varphi(a) = 0 = A\sin(k_n a) \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^a |\varphi_n(x)|^2 dx = \int_0^a |A|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = |A|^2 \cdot \frac{a}{2} \rightarrow |A|^2 = \frac{2}{a}.$$ Escojemos

A real y positivo (la fase no importa) $\rightarrow \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

$k_n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Para H_y todo es análogo.

$\Rightarrow$ Autoenergías de H serán $\boxed{\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2)}$ con $n_x, n_y = 1, 2, \ldots$

sus autoestados serán $|\varphi_n\rangle_x \otimes |\varphi_m\rangle_y$. En la base posición,

$$\phi_{nm}(x,y) = (\langle x| \otimes \langle y|)(|\varphi_n\rangle_x \otimes |\varphi_m\rangle_y) = \boxed{\frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}$$

Otra forma de escribir las autoenergías es $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} m$, con $m = n_x^2 + n_y^2$.

b) Estado fundamental: $E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(1+1) = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ $\quad g = 1$

1er estado excitado: $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(1+4) = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ $\quad g = 2$

2do estado excitado: $E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(4+4) = \frac{4\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ $\quad g = 1$

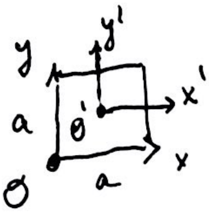
3er estado excitado: $E_3 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(1+9) = \frac{5\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ $\quad g = 2$

Donde g es el número de autoestados con esa energía.

E_1 y E_3 son degenerados.

Nicolás Valdés

c) Primero voy a re-definir el sistema de coordenadas para que esté centrado en $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ su nuevo origen. Este nuevo sistema tiene



una expresión distinta para $V_\infty(u) = \begin{cases} 0, & |u| \le a/2 \\ +\infty, & |u| > a/2 \end{cases}$

$P_{x'}$, $P_{y'}$ no cambian con respecto a P_x, P_y. No estoy cambiando la Física, ni haciendo una transformación al sistema; sólo cambiando el sistema de coordenadas. Voy a seguir usando las letras x, y en el nuevo sistema. Ahora, las autofunciones serán

$$\phi_{nm}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}+\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}+\frac{m\pi}{2}\right).$$

Las autoenergías no cambian. (ϕ_{nm}, tampoco, sólo su representación en el nuevo sistema).

Ahora, afirmo que la simetría culpable por la degeneración es una rotación en $\frac{\pi}{2}$ en torno al eje z. Esta operación hace $x \to y$, $y \to -x$,

$$P_x^2 \to \underbrace{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{P_y^2} \qquad P_y^2 \to \underbrace{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{P_x^2} \Rightarrow P_x^2+P_y^2 \to P_x^2+P_y^2$$

Además, $V_\infty(x) \to V_\infty(y)$, $V_\infty(y) \to V_\infty(-x) = V_\infty(x)$ pues V_∞ es par.

Entonces, bajo la rotación tendremos $H \to H$. Es, efectivamente, una simetría. Veamos cómo actúa sobre las autofunciones.

$$\phi_{np}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}+\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{p\pi y}{a}+\frac{p\pi}{2}\right) \to \frac{2}{a}\underline{\sin\left(\frac{n\pi y}{a}+\frac{n\pi}{2}\right)}\sin\left(\frac{-p\pi x}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)$$

Además, $\phi_{pn}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{p\pi x}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)\underline{\sin\left(\frac{n\pi y}{a}+\frac{n\pi}{2}\right)}$

Quiero mostrar que la versión transformada de ϕ_{np} corresponde a la versión no transformada de ϕ_{pn}. La parte subrayada ya está. Sólo falta lo otro. Llamamos $\frac{p\pi x}{a} \equiv q$

$$\sin\left(-q+\frac{p\pi}{2}\right) = -\sin(q)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\cos(q)$$

$$\sin\left(q+\frac{p\pi}{2}\right) = \sin(q)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\cos(q)$$

Dependiendo de si p es par o impar, se anula uno de los dos términos en cada expresión. Es fácil ver que

$$\sin\left(\alpha - \frac{p\pi}{2}\right) = \pm \sin\left(\alpha + \frac{p\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow \underbrace{\phi_{np}(x,y)}_{\text{transformado}} = \pm \phi_{pn}(x,y)$. Entonces vemos que ϕ_{np}, con energía correspondiente E_{np}, se transforma en ϕ_{pn} bajo $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, el cual tiene energía correspondiente E_{pn}. Esta operación es una simetría, por lo que $E_{np} = E_{pn}$, pero justamente ϕ_{pn} y ϕ_{np} son distintos sin que se efectúe la transformación, y uno "se rota" hacia el otro bajo la operación. De ahí que se origina la degeneración.

Para romper la simetría, podemos considerar un potencial $V = V_a(x) + V_b(y)$, con $V_a(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq a/2 \\ +\infty, & |x| > a/2 \end{cases}$ $\quad V_b(y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq b/2 \\ +\infty, & |y| > b \end{cases}$ con $a \neq b$.

Es fácil ver que H ya no será invariante bajo $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, por culpa del potencial; ya no se tiene $\underbrace{(V_a(x) \to V_a(y) \wedge V_b(y) \to V_b(x) \Rightarrow V \to V)}_{\text{esta implicancia}}$

Además, $E_{np} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2\right] \neq E_{pn} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]$ para $n \neq p$

$\Rightarrow$ ya no hay degeneración. (puede haber, pero ya no bajo $p \leftrightarrow n$ siempre)

d) Hay dos simetrías que me gustan que no causan degeneración. Una es traslación en el eje z. $z \to z + b$, b const., no cambia ni el Hamiltoniano, ni las funciones de onda. Como no produce un cambio en las autofunciones, no provoca degeneración*. Otra simetría que expongo es $R(\pi)$, que hace $x \to -x$, $y \to -y$. Es evidente que no cambia a H (es una simetría). Ver que no cambia las autofunciones es similar a cuando vimos que $\phi_{np} \to \phi_{pn}$.

*Sí, sé, es un poco ridículo este primer ejemplo.