Universidad de Chile
Departamento de Física
FI7002 - Mecánica Cuántica II

Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 2 - Spin y Producto Tensorial

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

P1. Suponga que dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ están en el estado singlete. Sea $S_a^{(1)}$ la componente de spin de la partícula 1 en la dirección del vector unitario $\hat{a}$, y $S_b^{(2)}$ el spin de la partícula 2 en la dirección $\hat{b}$. Muestre que $\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos(\theta)$ donde θ es el ángulo entre $\hat{a}$ y $\hat{b}$.

P2. (a) Muestre que $f(\phi+\phi_0) = \exp(iL_z\phi_0/\hbar)f(\phi)$, con ϕ_0 constante. Por esto decimos que $L_z/\hbar$ es el generador de rotaciones en torno al eje z. Más en general, $\vec{L}\cdot\hat{n}/\hbar$ genera rotaciones en torno al eje $\hat{n}$. Por ejemplo, la forma en que rotan los spin $\frac{1}{2}$ es $\chi' = e^{i(\sigma\cdot\hat{n})\varphi/2}\chi$.

(b) Encuentre la matriz que representa rotación de π en torno a $\hat{x}$, y muestre que convierte spin up a spin down.

(c) Encuentre la matriz que representa rotación de $\pi/2$ en torno a $\hat{y}$, y calcule cómo afecta a χ_+.

(d) Encuentre la matriz que representa rotación de 2π en torno al eje z. Discuta.

(e) Muestre que $\exp(i\sigma\cdot\hat{n}\varphi/2) = \cos(\varphi/2) + i(\sigma\cdot\hat{n})\sin(\varphi/2)$.

P3. Considere una partícula de masa m, restringida a un pozo de potencial infinito bidimensional cuadrado de lado a: su energía potencial $V(x,y)$ se vuelve infinita cuando una de sus coordenadas x o y deja el intervalo $[0,a]$.

$$V(x,y) = V_\infty(x) + V_\infty(y), \quad \text{donde } V_\infty(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq u \leq a \\ \infty & \text{si } u < 0, \text{ o } u > a \end{cases} \tag{1}$$

(a) Escriba el Hamiltoniano de la partícula como $H = H_x + H_y$, donde el subíndice se refiere a la coordenada de la que depende cada sumando del Hamiltoniano. Encuentre las autoenergías del sistema y las funciones de onda espaciales asociadas a ellas. Para ello considere autoestados de la forma $|\Phi\rangle = |\varphi\rangle_x |\varphi\rangle_y$, donde $|\varphi\rangle_i$ es un estado del espacio de Hilbert asociado a H_i, y $|\Phi\rangle$ vive en el espacio producto (¿por qué es posible hacer esto?).

(b) Escriba las autoenergías asociadas al estado fundamental, y al primer, segundo, y tercer estado excitado. ¿Cuál de estos estados son degenerados?

(c) Note que, escribiendo $E = E_{n,p}$ con el primer índice refiriéndose a la contribución de la dimensión x y el segundo a la dimensión y, se tiene $E_{n,p} = E_{p,n}$. Esta degeneración está relacionada a una simetría del problema. Encuéntrela y haga explícita la operación asociada que deja invariante al Hamiltoniano. Justifique, por inspección de la acción de esta operación sobre las funciones de onda, el origen de la degeneración $E_{n,p} = E_{p,n}$. Adicionalmente, encuentre una forma de romper esta simetría, y verifique que dicha degeneración desaparece.

(d) Este pozo de potencial posee simetrías adicionales, que no crean degeneración en las autoenergías. Encuentre una de ellas, haciendo explícita la operación asociada, y mediante su acción sobre las funciones de onda justifique por qué no existe una degeneración asociada.