Aux 1

(a) $H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad H_B' = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}_0 = -B_0\gamma_0 L_z$ operador!

Explicación informal: $\mu = IA$ $\quad I = \frac{e}{T} \Rightarrow \mu = \frac{ev}{2\pi r}\cdot \pi r^2 = \frac{e}{2} vr = \frac{e}{2m} L_z \equiv \gamma_0 L_z$

$v = \frac{2\pi r}{T}$

Para encontrar $\delta E_n^{(k)}$ hay que diagonalizar la matriz $\langle nlm | H_B' | nl'm'\rangle$, con $n=2$, $l \in \{0,1\}$, $m \in \{-1,0,1\}$. $\Rightarrow$ Los elementos de matriz son $\langle 2lm | L_z | 2l'm'\rangle \cdot (-\gamma_0 B_0)$.

$= -\gamma_0 B_0 \cdot m'\hbar \langle 2lm | 2l'm'\rangle = -\gamma_0 B_0 m'\hbar \delta_{ll'}\delta_{mm'}$ porque los autoestados son ortonormales.

Esta matriz ya es diagonal :) $\Rightarrow$ $\delta E_2^{(k)} = -\gamma_0 B_0 \hbar k$ con $k \in \{-1,0,1\}$.

$\Rightarrow$ La fórmula funciona, e identificamos $\omega_0 \equiv -\gamma_0 B_0$.

$$\delta E_2^{(k)} = \begin{cases} \hbar\omega_0 & (l=1, m=1) \\ 0 & (l=0, m=0 \text{ y } l=1, m=0) \rightarrow 2 \text{ degeneración} \\ -\hbar\omega_0 & (l=1, m=-1) \end{cases}$$

(b) $H_E' = -eE_0 x$ $\quad$ Necesitamos diagonalizar $\langle 2lm | x | 2l'm'\rangle$, $x = r\sin\theta\cos\phi$.

$$\langle 2lm|x|2l'm'\rangle = \int (Y_l^m)^* \sin\theta\cos\phi \, Y_{l'}^{m'} \, d\Omega \int r^3 R_{2l} R_{2l'} \, dr$$

Los Y_l^m tienen paridad $(-1)^l \Rightarrow$ si $l=l'$, $(Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'}$ aporta un término par. Pero $\cos\phi$ es impar bajo trans. de paridad $\Rightarrow$ los elementos de matriz son cero si $l=l'$.

Queda la opción $l=0, l'=1$ (y reversa), con $m=0$, $m'=\{0,\pm 1\}$.

$$\langle 200|x|21m'\rangle = \int Y_0^0 \sin\theta\cos\phi \, Y_1^{m'} \, d\Omega \int r^3 R_{20}R_{21} \, dr$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\phi \, Y_1^{m'} \, d\theta \, d\phi \cdot (-3\sqrt{3}\,a).$$ Truco: $Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi}\sin\theta$

$$\Rightarrow Y_1^{-1} - Y_1^{1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cdot 2\sin\theta\cos\phi \Rightarrow \langle 200|x|21m'\rangle = -3\sqrt{3}\,a\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\int\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,(Y_1^{-1} - Y_1^{1})\,Y_1^{m'}\,d\Omega$$

$$= -3\sqrt{3}\,a\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}\,\{\delta_{m',-1} - \delta_{m',1}\} = \frac{-3a}{\sqrt{2}}\left(\delta_{m',-1} - \delta_{m',1}\right) = \frac{3a}{\sqrt{2}}\left(\delta_{m',1} - \delta_{m',-1}\right)$$

$$\Rightarrow \{H_E'\} = \begin{array}{c|cccc} & 0,0 & 1,-1 & 1,0 & 1,1 \\ \hline 0,0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1,-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \cdot \frac{3a}{\sqrt{2}}\cdot(-eE_0) \equiv \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: $\Omega_e = \frac{ea}{\hbar}E_0$!

(c) Hay que diagonalizar $\{H_B' + H_E'\} = \{H_B'\} + \{H_E'\} \equiv M$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & +\hbar\omega_0 \end{pmatrix}$$

Notamos que la columna/fila corresp. a $l=1, m=0$ tiene todos los elementos nulos $\Rightarrow$ la ponemos en los bordes para que la matriz sea diagonal por bloques.

$$
\mathcal{M} = \begin{array}{c|cccc}
 & 0,0 & 1,-1 & 1,0 & 1,1 \\
\hline
0,0 & 0 & -\varepsilon & 0 & \varepsilon \\
1,-1 & -\varepsilon & -\hbar\omega_0 & 0 & 0 \\
1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1,1 & \varepsilon & 0 & 0 & \hbar\omega_0
\end{array}
\sim
\begin{array}{c|cccc}
 & 1,0 & 0,0 & 1,-1 & 1,1 \\
\hline
1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0,0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \varepsilon \\
1,-1 & 0 & -\varepsilon & -\hbar\omega_0 & 0 \\
1,1 & 0 & \varepsilon & 0 & \hbar\omega_0
\end{array}
$$

$$
\det(\mathcal{M} - I\lambda) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -\varepsilon & -\hbar\omega_0-\lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \hbar\omega_0-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\hbar\omega_0-\lambda & 0 \\ \varepsilon & 0 & \hbar\omega_0-\lambda \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \lambda\left(\lambda(\hbar\omega_0+\lambda)(\hbar\omega_0-\lambda) + \varepsilon^2(\hbar\omega_0+\lambda) - \varepsilon^2(\hbar\omega_0-\lambda) \right) = 0
$$

$$
\Rightarrow \lambda = \boxed{0}, \quad \hbar^2\omega_0^2 - \lambda^2 + 2\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\hbar^2\omega_0^2 + 2\varepsilon^2}
$$

(2 deg.)

$$
= \pm\sqrt{\hbar^2\omega_0^2 + 9a^2e^2E_0^2} = \boxed{\pm\hbar\sqrt{\omega_0^2 + 9\Omega_e^2}}
$$

La fórmula era $\delta E_n^{(k)} = \hbar k(\omega_0^2+\omega_e^2)^{1/2}$, $\omega_e \equiv \frac{3}{2}\Omega_e f(n) \Rightarrow$ se cumple! Tenemos

$3\Omega_e = \omega_e \Rightarrow \boxed{f(2)=2}$

(d) Tenemos una recta $E_0^2 = c^2 - B_0^2 m^2 \Rightarrow E_0^2 + B_0^2m^2 = c^2$. Funciona! Porque δE es cte para el subnivel de energía, y habíamos dicho que es prop. a $\sqrt{\alpha^2E_0^2+\beta^2B_0^2}$.

(e) $\omega_0^2 + \omega_e^2 = \gamma_0^2 B_0^2 + \frac{9}{4}f(n)^2\frac{e^2a^2}{\hbar^2}E_0^2 = \frac{9}{4}\frac{e^2a^2}{\hbar^2}\left\{\frac{\hbar^2}{9m^2a^2}B_0^2 + f(n)^2E_0^2\right\}$

$\Rightarrow \frac{1}{9}c^2\alpha^2B_0^2 + f(n)^2E_0^2 = \text{cte} \equiv d$

$\frac{1}{9}\cdot\left(3\times10^8 \frac{m}{s}\right)^2\times\left(\frac{1}{137}\right)^2\times 85\times10^{-4}T^2 = d = 10^{16}\cdot\frac{1}{1,9\cdot10^4}\cdot 8,5\times10^{-3}\,V^2m^{-2} = 4,5\times10^9\,V^2m^{-2}$

$f(34)^2\times 3,9\cdot10^6\,V^2m^{-2} = d = 4,5\times10^9\,V^2m^{-2} \Rightarrow f(34)^2 \approx 1,2\times10^3 \Rightarrow \boxed{f(34)=34}$

Y como $f(2)=2$, adivinamos $f(n)=n$!