Auxiliar 1 - Perturbaciones al Hidrógeno

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

En su artículo del átomo de hidrógeno de 1926, Pauli notó, entre muchas otras cosas, que era posible obtener una fórmula compacta para la separación de los niveles de energía del hidrógeno en presencia de un campo magnético $\vec{B}_0$ y un campo eléctrico perpendicular $\vec{E}_0$, ambos constantes y uniformes. Encontró que el nivel con número cuántico principal n se separa en $2n-1$ subniveles $E_n + \delta E_n^{(k)}$, con

$$\delta E_n^{(k)} = k\hbar(\omega_0^2 + \omega_e^2)^{1/2}, \tag{1}$$

con k un entero en $\{-(n-1), ..., (n-1)\}$, y ω_0, ω_e proporcionales a B_0, E_0, respectivamente. Definimos las cantidades $\omega_e = \frac{3}{2}\Omega_e f(n)$, $\Omega_e = (ea/\hbar)E_0$, donde a es el radio de Bohr y e es la carga del electrón. Notar que acá estamos haciendo un supuesto sobre cómo va a ser ω_e.

Sólo en 1983 este resultado fue verificado experimentalmente. Nuestro propósito ahora es probar la fórmula para $\delta E_n^{(k)}$, ω_0, y ω_e en el caso $n = 2$, y al examinar el caso experimental para $n = 34$, adivinar cuál es la fórmula simple encontrada por Pauli para $f(n)$. Desprecie todos los efectos de spin. Asuma que $\vec{B}_0$ apunta en el eje z y $\vec{E}_0$ en el eje x. Aproxime hasta primer orden.

(a) El Hamiltoniano debido solamente a la presencia del campo magnético es $H'_B = -\vec{u}_{orb} \cdot \vec{B}_0 = -\gamma_0 L_z B_0$, con $\gamma_0 = e/2m$. Muestre que la fórmula para $\delta E_n^{(k)}$ es válida aquí (para $n = 2$) y encuentre ω_0.

(b) En presencia del campo eléctrico solamente, el Hamiltoniano es $H'_E = -eE_0 x$. Escriba la matriz que debe diagonalizar para encontrar la primera corrección a la energía. Recuerde que:

$$\int_0^\infty r^3 R_{20} R_{21} dr = -3\sqrt{3}a, \quad Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi}\sin\theta.$$

(c) Calcule las distintas energías para $n = 2$, en presencia de ambos campos $\vec{B}_0$ y $\vec{E}_0$. Muestre que se cumple la fórmula para $\delta E_n^{(k)}$, con $\omega_e = \frac{3}{2} f(2)\Omega_e$, dando el valor de $f(2)$.

(d) En la página que sigue hay un gráfico con resultados experimentales. Calzan los datos con la fórmula para $\delta E_n^{(k)}$?

(e) Escriba $\omega_0^2 + \omega_e^2$ en la forma $c_1(c_2 B_0^2 + f(n)^2 E_0^2)$ y calcule $f(34)$. Infiera desde aquí cuánto es $f(n)$. Ayuda: $(\hbar/am) = c\alpha$, donde c es la velocidad de la luz y $\alpha \approx 1/137$ la constante de estructura fina.

Resultado Experimental: En la Figura 1 de la página siguiente los puntos corresponden a un subnivel de energía con un k dado para el estado $n = 34$ del átomo de hidrógeno. Todos los puntos corresponden a la *misma energía* de ese nivel, pero a diferentes valores de los campos B_0 y E_0.

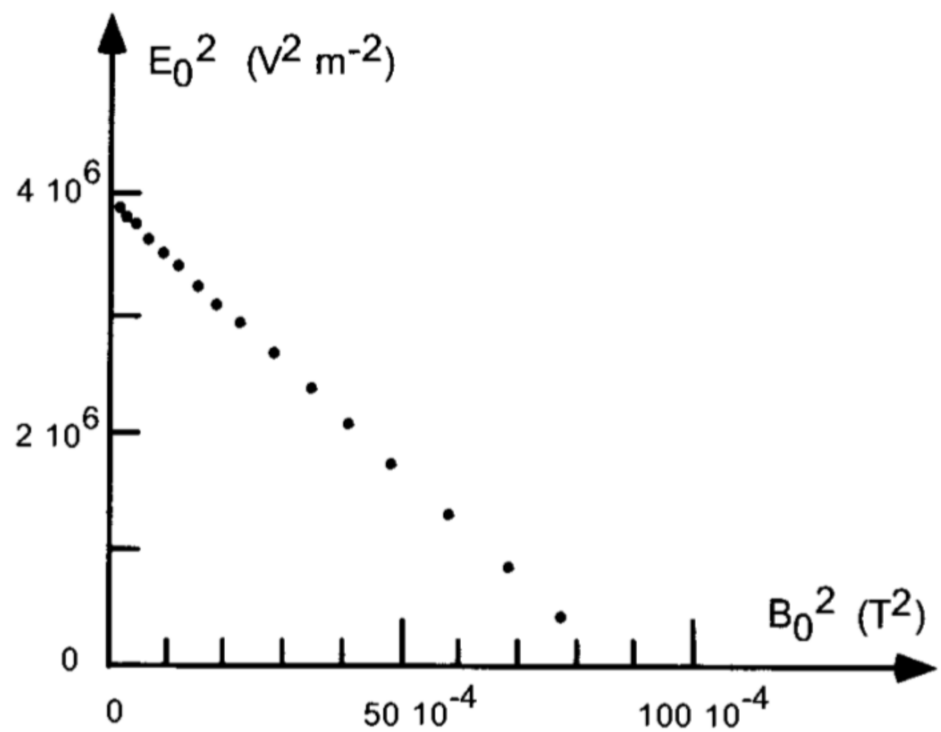

Figura 1: Valores del campo eléctrico y campo magnético que resultan en el mismo subnivel de energía del nivel $n = 34$ de Hidrógeno