

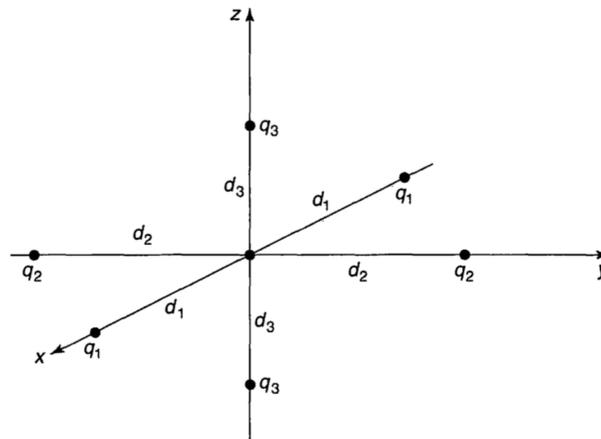
# Tarea 1

Fecha de Entrega: 10 de octubre

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Nicolás Valdés

**P1.** En un cristal, el campo eléctrico de los iones vecinos perturba los niveles de energía de un átomo. Como un modelo simplificado, imagine que un átomo de hidrógeno está rodeado por tres pares de cargas puntuales, como se muestra en la figura. (Ignore los efectos de spin para este problema.)



(a) Asumiendo que  $r \ll d_1$ ,  $r \ll d_2$  y  $r \ll d_3$ , muestre que

$$H' = V_0 + 3(\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)r^2, \quad (1)$$

donde

$$\beta_i \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{d_i^3}, \quad \text{y} \quad V_0 \equiv 2(\beta_1 d_1^2 + \beta_2 d_2^2 + \beta_3 d_3^2). \quad (2)$$

- (b) Encuentre la corrección no nula de orden más bajo a la energía del estado fundamental del hidrógeno.
- (c) Calcule las correcciones de primer orden a la energía de los primeros estados excitados ( $n = 2$ ). Para los siguientes casos, determine en cuántos niveles se divide esta degeneración:
- i. Simetría cúbica:  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ .
  - ii. Simetría tetragonal:  $\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3$ .
  - iii. Simetría ortorrómbica:  $\beta_1 \neq \beta_2, \beta_2 \neq \beta_3, \beta_3 \neq \beta_1$ .

**P2.** Un electrón tiene spin inicial apuntando en la dirección  $+\hat{x}$ . Se coloca en un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{y}$ . Calcule la probabilidad de encontrar el electrón con su spin apuntando en la dirección  $+\hat{z}$ , en un tiempo  $t$ . Considere en el Hamiltoniano solo el término de interacción del dipolo magnético debido al spin, con el campo magnético externo. Encuentre los tiempos  $T$  para los cuales esta probabilidad es máxima, e interprete.

**P3.** Suma de momentos angulares.

- (a) Sea  $\vec{L}$  un momento angular orbital,  $\vec{S}$  un momento angular de spin, y  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Calcule las siguientes relaciones de conmutación:  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, \vec{L}]$ ,  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, \vec{S}]$ ,  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, \vec{J}]$ ,  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, L^2]$ ,  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, S^2]$ ,  $[\vec{L} \cdot \vec{S}, J^2]$ .

*Indicación:* Quizás le sirva la notación de Einstein para la contracción de índices, y recuerde que todo momento angular  $\vec{A}$  satisface la relación  $[A_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k$ .

¿Qué base puede elegir que diagonalice  $J_z$  y  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  simultáneamente?

- (b) Para calcular los valores posibles del vector suma de tres momentos angulares  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3$ , se suma primero dos y luego se agrega el tercero a la suma parcial. Considere tres partículas, de spin 1, 1/2, y 3/2. Encuentre los valores posibles para el spin total y su degeneración. Verifique explícitamente (i.e. haciendo el cálculo) que el resultado no depende del orden en que se hace la suma.

**P4.** En este problema vamos a intentar entender los relojes atómicos de alta precisión. Éstos tienen numerosas aplicaciones, como el control de vuelo de aviones, el sistema GPS, la medición de constantes físicas, etc.

La idea es considerar el estado fundamental del electrón externo de un átomo alcalino (rubidio, cesio, etc.). El núcleo atómico tiene spin  $s_n$  ( $s_n = 3/2$  para  $^{87}\text{Rb}$ ,  $s_n = 7/2$  para  $^{133}\text{Cs}$ ).

- (a) Calcule la degeneración del estado fundamental si es que uno ignora la interacción magnética entre el núcleo y el electrón externo. Usaremos la notación

$$|m_e; m_n\rangle \equiv |\text{electrón: } s_e, m_e\rangle \otimes |\text{núcleo: } s_n, m_n\rangle, \quad (3)$$

la base de los spines totales (electrón externo + núcleo). Recuerde que  $s_e = 1/2$  siempre.

- (b) Ahora tomamos en cuenta la interacción. Escribimos el Hamiltoniano correspondiente como

$$H = \frac{A}{\hbar^2} \vec{S}_e \cdot \vec{S}_n, \quad (4)$$

donde  $A$  es una energía característica y  $\vec{S}_i$  son los operadores de spin. Queremos encontrar los autovalores de este Hamiltoniano. Para esto introducimos los operadores  $S_{e,\pm} = S_{e,x} \pm iS_{e,y}$  y  $S_{n,\pm} = S_{n,x} \pm iS_{n,y}$ .

i. Muestre que

$$H = \frac{A}{2\hbar^2} (S_{e,+}S_{n,-} + S_{e,-}S_{n,+} + 2S_{e,z}S_{n,z}). \quad (5)$$

ii. Muestre que los estados

$$|m_e = 1/2; m_n = s_n\rangle \quad \text{y} \quad |m_e = -1/2; m_n = -s_n\rangle \quad (6)$$

son autoestados de  $H$  y obtenga las autoenergías correspondientes.

- iii. ¿Cuál es la acción de  $H$  sobre el estado  $|m_e = 1/2; m_n\rangle$  con  $m_n \neq s_n$ ? ¿Cuál es la acción de  $H$  sobre el estado  $|m_e = -1/2; m_n\rangle$  con  $m_n \neq -s_n$ ?
- iv. Deduzca a partir de estos resultados que los autovalores de  $H$  se pueden calcular diagonalizando la matriz

$$\frac{A}{2} \begin{pmatrix} m_n & \sqrt{s_n(s_n+1) - m_n(m_n+1)} \\ \sqrt{s_n(s_n+1) - m_n(m_n+1)} & -(m_n+1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

- (c) Muestre que  $H$  divide el estado fundamental en dos subestados  $E_1 = E_0 + As_n/2$  y  $E_2 = E_0 - A(1 + s_n)/2$ . Recupere el caso particular del átomo de hidrógeno.
- (d) Muestre que los estados correspondientes a las energías  $E_1$  y  $E_2$  son autoestados del cuadrado del spin total  $(\vec{S}_e + \vec{S}_n)^2$ . ¿Cuál es el valor correspondiente  $s$  del spin?
- (e) ¿Cuál es la degeneración de los dos subniveles  $E_1$  y  $E_2$ ? Si se mide la frecuencia de transición entre estos dos niveles y resulta  $f = 9.2$  GHz, calcule cuánto es la energía característica  $A$  en eV.
- (f) Explique qué tiene que ver con un reloj atómico lo que hizo. Quizás le sirva recordar la estructura hiperfina del hidrógeno.