

Campos magnéticos quasi-estáticos en conductores:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Con $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ en la ley de Faraday se obtiene:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

$$\text{Asumimos } \rho = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Para un medio con μ uniforme e independiente de la frecuencia se tiene que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} = \mu \sigma \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \text{Ecuación de difusión}$$

Difusión en medios conductores:

Se ilustra usando 2 planos de corriente en un conductor infinito, estos son paralelos en $z=a$ y $z=-a$. Las corrientes son tales que $\vec{H} = H_0 \hat{x}$ cte. en $0 < |z| < a$, explícitamente:

$$\vec{H} = H_0 \left(\mathcal{H}(z+a) - \mathcal{H}(z-a) \right) \hat{x}$$

Explícitamente la corriente es:

$$\vec{J} = H_0 (\delta(z+a) - \delta(z-a)) \hat{y}$$

En $t=0$ se apaga la corriente, su dinámica estará regida por:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad / \quad \nabla \times$$

$$\Leftrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \nabla \times \vec{J} = \nabla \times (\sigma \vec{E}) = \nabla \times \left(-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 \vec{H} = \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1)$$

Usamos la transformada de Laplace para separar la parte temporal de la espacial:

$$H_x(z, t) = \int_0^\infty dp e^{-pt} \bar{h}(p, z)$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{d^2}{dz^2} (e^{-pt} \bar{h}(p, z)) + \sigma \mu p e^{-pt} \bar{h}(p, z) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dz^2} + \sigma \mu p \right) \bar{h}(p, z) = 0$$

Cambiamos a $k^2 = \sigma \mu p$:

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \bar{h}(p, z) = 0$$

Como el problema es simétrico Al rededor de $z=0$ una solución es $\propto \cos(kz)$, entonces:

$$H_x(z,t) = \int_0^{\infty} e^{-k^2 t / \mu \sigma} h(k) \cos(kz) dk$$

Determinamos $h(k)$ viendo H_x en $t=0$:

$$\begin{aligned} H_x(z,0) &= \int_0^{\infty} h(k) \cos(kz) dk = H_0 \left(\Theta(z+a) - \Theta(z-a) \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{h(k)}{2} \left(e^{ikz} + e^{-ikz} \right) dk = \quad \% \end{aligned}$$

tomando $h(k) = h(-k)$:

$$= \int_0^{\infty} \frac{h(k)}{2} e^{ikz} dk + \int_{-\infty}^0 \frac{h(k)}{2} e^{ikz} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk h(k) e^{ikz} = \quad \%$$

→ transformada de Fourier de $h(k)$, invertimos la transformada:

$$\Rightarrow h(k) = 2H_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} \left(\Theta(z+a) - \Theta(z-a) \right)$$

$$= \frac{H_0}{\pi} \int_{-a}^a dz e^{-ikz} = \frac{H_0}{\pi} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}(ka)}{k}$$

Usando $k = ka \wedge v = (\mu \sigma a^2)^{-1}$

$$H_x(z, t) = \frac{2H_0}{\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-vtk^2} \frac{\sin(k)}{k} \cos\left(\frac{zk}{a}\right)$$

$$= \frac{H_0}{\pi} \int_0^{\infty} dk \left(e^{-vtk^2 + \frac{zk}{a}} \frac{\sin(k)}{k} + e^{-vtk^2 - \frac{zk}{a}} \frac{\sin(k)}{k} \right)$$

$$= \frac{H_0}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1 + |z|/a}{2\sqrt{vt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1 - |z|/a}{2\sqrt{vt}}\right) \right)$$