

A. Potencial Vector:

Se tiene que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Además $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$, entonces:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J}$$

$$\Leftrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$$

En el gauge de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ entonces:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

B. Potencial escalar magnético:

S: $\vec{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = 0 \Rightarrow$ Se puede introducir un potencial escalar:

$$\vec{H} = -\nabla \Phi_m$$

S: el medio es lineal entonces:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\mu \nabla \Phi_m) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi_m = 0$$

C. Hard Ferromagnets ($\vec{H}$ dado y $\vec{J} = 0$)

(a) Potencial escalar:

Se tiene que $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 (\nabla \cdot (\vec{H} + \vec{M})) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \Phi_m = -\nabla \cdot \vec{M}$$

llamamos $\nabla \cdot \vec{M} = \rho_m$:

$$\nabla^2 \Phi_m = -\rho_m$$

Si no hay superficies de borde entonces la solución de Φ_m es:

$$\Phi_m = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Si $\vec{M}$ está localizada y se comporta bien entonces integrando por partes:

$$\Phi_m = \frac{1}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d^3x'$$

$$\text{Ahora } \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

$$\Rightarrow \Phi_m = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

$$\text{Muy lejos } \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \Phi_m \approx -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int \vec{M}(\vec{x}') d^3x'$$

$$\text{con } \int \vec{M}(\vec{x}') = \vec{m}$$

$$\Rightarrow \Phi_m \approx \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{4\pi r^3} \rightarrow \text{Potencial escalar de un dipolo}$$

Si $\vec{M}(\vec{r})$ es discontinuo es necesario agregar la integral de superficie:

$$\Phi_m = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\hat{n}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da'$$

(b) Si $\vec{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \nabla \times \vec{M}$$

tomamos $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_m$$

Entonces la solución sin superficies de borde:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x'$$

Si $\vec{M}(\vec{r})$ es discontinuo entonces hay que agregar la integral de superficie

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da'$$

Esfera uniformemente magnetizada:

$$\vec{M} = M_0 \hat{z} \quad \wedge \quad \hat{m} = \hat{r} \rightarrow \hat{z} \cdot \hat{r} = \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \Phi_m(r, \theta) = \frac{M_0}{4\pi} \int d\Omega \frac{\cos(\theta') a^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) ; Y_1^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta)$$

Simétrico en $\phi \Rightarrow m=0$, en la integral solo sobrevive $l=0$

$$\Rightarrow \Phi_m(r, \theta) = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \left[\int_0^\pi d\theta' \sin(\theta') \cos^2(\theta') \int_0^{2\pi} d\phi' \right] \frac{3}{4\pi} \cos(\theta) \frac{r_{<}}{r_{>}^2}$$

$$= \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \cos(\theta) \frac{r_{<}}{r_{>}^2}$$

$$= \frac{\mu_0 a^2}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos(\theta)$$

Dentro de la esfera:

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 r}{3} \cos(\theta)$$

$$= H = -\nabla(\Phi_m)$$

$$= -\frac{\mu_0}{3} \cos(\theta) \hat{r} + \frac{\mu_0}{3} \sin(\theta) \hat{\theta}$$

$$= -\frac{\mu_0}{3} (\cos(\theta) \hat{r} - \sin(\theta) \hat{\theta})$$

$$= -\frac{\mu_0}{3} \hat{z} = -\frac{\vec{M}}{3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}$$

Fuera de la esfera el potencial es:

$$\Phi_m = \frac{M_0 a^3}{3} \frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{M_0 a^3}{3} \left(\frac{2\cos(\theta)}{r^3} \hat{r} - \frac{\sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta} \right)$$
$$= \frac{M_0 a^3}{3 r^3} \left(2\cos(\theta) \hat{r} + \sin(\theta) \hat{\theta} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Campo externo en la esfera magnetizada:

$$B_{in} = \vec{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}$$

$$H_{in} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 - \frac{1}{3} \vec{M}$$

con $\vec{B}_0$ el campo externo

Ahora asumimos que la esfera no está permanentemente magnetizada, si no que es paramagnética o diamagnética con permeabilidad μ . Entonces la magnetización es un resultado de un campo externo, entonces:

$$\vec{B}_{in} = \mu \vec{H}_{in}$$

$$\Leftrightarrow \vec{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3} \vec{M} = \mu \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 - \frac{1}{3} \vec{M} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{3}{\mu_0} \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \right) \vec{B}_0$$