Auxiliar 5

Viernes 16 de noviembre.

P1. Considere un oscilador armónico 3D isotrópico:

$$H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{R}^2$$

a) Muestre que el Hamiltoniano puede separarse en tres osciladores armónicos independientes, y con esto calcule las autoenergías con sus respectivas degeneraciones.

b) ¿Conmuta el Hamiltoniano con L_z? ¿Conmuta con $\mathbf{L}^2$? Interprete este resultado.

c) Suponga que se trata de una partícula con carga q y que además del potencial del oscilador armónico, se somete a un campo magnético homogéneo $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Definiendo $\omega_L = \frac{qB}{2m}$, y usando el gauge $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{B}$, muestre que el Hamiltoniano resultante tiene la forma:

$$H = H_0 + H_1(\omega_L) + H_2(\omega_L^2)$$

El termino que depende linealmente de ω_L se denomina termino paramagnético, y el que depende cuadráticamente de ω_L se denomina término diamagnético.

d) Asumiendo que el campo magnético es pequeño, despreciaremos el término diamagnético en el Hamiltoniano. Calcule las nuevas energías de los estados que originalmente eran el estado basal y el 1er estado excitado.

P2. En principio, las relaciones de conmutación para el momento angular, permiten autovalores que sean multiplos enteros o semienteros de $\hbar$. Para el caso del momento angular orbital $\mathbf{L}$, ssus componentes solo pueden tener autovalores enteros. Mientras que el momento angular intrínseco,o spin $\mathbf{S}$ puede tener autovalores tanto enteros como semi enteros. En este problema estudiaremos la razón de esta diferencia.

Sea a una longitud característica del sistema, definimos:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{a^2}{\hbar}p_y\right)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{a^2}{\hbar}p_y\right)$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x - \frac{\hbar}{a^2}y\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x + \frac{\hbar}{a2}y\right)$$

a) Verifique el cambio de coordenadas anterior es válido, es decir, que (q_1, p_1) y (q_2, p_2) cumplen relaciones de conmutación canonicas.

b) Muestre que:

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

c) Muestre que $L_z = H_1 - H_2$, donde cada H es el Hamiltoniano de un oscilador armónico de masa $m = \hbar/a^2$ y frecuencia $\omega = 1$.

d) A partir de lo anterior, argumente que los autovalores de L_z deben ser multiplos enteros de $\hbar$.