P3] b) Demostración

- La clave es notar que si tenemos un tensor con un índice arriba y otro abajo: $A^i{}_j \neq A_j{}^i$, son espacios distintos

- Si $R^i{}_{j'}$ es una rotación, a_{ij} es isótropo si $a_{i'j'} = a_{ij}$

- Consideramos una rotación infinitesimal en torno al eje k $(\delta\theta^k)$ entonces $R^i{}_{j'}$ es

$$\boxed{R^i{}_{j'} = \delta^i{}_{j'} - \delta^{ir}\varepsilon_{rj'k}\delta\theta^k}$$

- Luego calculamos el efecto de la rotación para a_{ij}

$$\begin{aligned}
a_{i'j'} &= R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} a_{ij} \\
&= \left[\delta^i{}_{i'} - \delta^{ir}\varepsilon_{ri'k}\delta\theta^k\right]\left[\delta^j{}_{j'} - \delta^{jr}\varepsilon_{rj'k}\delta\theta^k\right] a_{ij} \\
&= \left[\delta^i{}_{i'}\delta^j{}_{j'} - \left(\delta^i{}_{i'}\delta^{jr}\varepsilon_{rj'k} + \delta^j{}_{j'}\delta^{ir}\varepsilon_{ri'k}\right)\delta\theta^k + \mathcal{O}(\delta\theta^{k^2})\right] a_{ij} \\
&\simeq a_{i'j'} - \left(\delta^i{}_{i'}\delta^{jr}\varepsilon_{rj'k} + \delta^j{}_{j'}\delta^{ir}\varepsilon_{ri'k}\right)\delta\theta^k a_{ij}
\end{aligned}$$

Despreciamos $\mathcal{O}(\delta\theta^{k^2})$

- Si $\delta\theta^k$ es arbitrario, entonces se debe cumplir que

$$\Rightarrow \left(\delta^i{}_{i'}\delta^{jr}\varepsilon_{rj'k} + \delta^j{}_{j'}\delta^{ir}\varepsilon_{ri'k}\right) a_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow a_{i'j}\delta^{jr}\varepsilon_{rj'k} + a_{ij'}\delta^{ir}\varepsilon_{ri'k} = 0$$

$$(A) \quad \Rightarrow a_{i'}{}^r\varepsilon_{rj'k} + a^r{}_{j'}\varepsilon_{ri'k} = 0 \quad / \ \varepsilon^{li'k}$$

$$\Rightarrow a_{i'}{}^r\varepsilon^{li'k}\varepsilon_{rj'k} + a^r{}_{j'}\varepsilon^{li'k}\varepsilon_{ri'k} = 0$$

• Usando la propiedad: $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{\ell mk} = \delta^i{}_\ell \delta^j{}_m - \delta^i{}_m \delta^j{}_\ell$

$$\Rightarrow a_{i'}{}^r\left[\delta^\ell{}_r \delta^{i'}{}_{j'} - \delta^\ell{}_{j'}\delta^{i'}{}_r\right] + a^r{}_{j'}\left[\delta^\ell{}_r \delta^{i'}{}_{i'} - \delta^\ell{}_{i'}\delta^{i'}{}_r\right] = 0$$

$$\Rightarrow a_{i'}{}^\ell \delta^{i'}{}_{j'} - \delta^\ell{}_{j'}\, tr(a) + a^\ell{}_{j'}\underbrace{\delta^{i'}{}_{i'}}_{D} - a^{i'}{}_{j'}\delta^\ell{}_{i'} = 0$$

$$\Rightarrow a_{j'}{}^\ell - \delta^\ell{}_{j'}\, tr(a) + D\, a^\ell{}_{j'} - a^\ell{}_{j'} = 0$$

$$\Rightarrow a_{j'}{}^\ell + (D-1)\, a^\ell{}_{j'} = \delta^\ell{}_{j'}\, tr(a) \qquad (1)$$

• Si hacemos el mismo procedimiento, pero multiplicando (*) por $\varepsilon^{\ell j' k}$, llegamos a una expresión de la forma

$$\Rightarrow a^\ell{}_{j'} + (D-1)\, a_{j'}{}^\ell = \delta_{j'}{}^\ell\, tr(a) \qquad (11)$$

• Si hacemos (1) - (11), llegamos a

$$a_{j'}{}^\ell = a^\ell{}_{j'}$$

• Reemplazamos en la ec (1)

$$\Rightarrow a^\ell{}_{j'} + (D-1)\, a^\ell{}_{j'} = \delta^\ell{}_{j'}\, tr(a)$$

$$\Rightarrow a^\ell{}_{j'} = \delta^\ell{}_{j'}\, \frac{tr(a)}{D} \qquad / \ \delta_{i'\ell}$$

$$\Rightarrow a_{i'j'} = \frac{tr(a)}{D}\, \delta_{i'j'} \qquad ; \quad \frac{tr(a)}{D} = \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}}$$