FI2002-1 Electromagnetismo
Profesor: Patricio Cordero
Auxiliares: Fabián Álvarez & Nicolás Parra

Pauta auxiliar 3: Diélectricos y condensadores

03 de octubre de 2018

1 Solución P1

Por simetría, asumimos que $\vec{E} = E(r,\phi)\hat{r}$ y que el campo eléctrico está definido por tramos al igual que el vector desplazamiento, esto es:

$$E(r,\phi) = \begin{cases} E_1(r) & \phi \in [0,\pi) \\ E_2(r) & \phi \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$D(r,\phi) = \begin{cases} D_1(r) & \phi \in [0,\pi) \\ D_2(r) & \phi \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

En eléctroestática se cumple que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, por lo que se tiene que $E_1(r) = E_2(r)$ (Ver condiciones de borde en apunte del profesor y teorema de Stokes), ahora, simplemente usamos la ley de Gauss en un cilidnro de radio arbitrario $r \in [a,b]$ y altura arbitraria L, recordamos que $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$:

$$\oint_r \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{V_r} \rho dV = L\lambda \tag{1}$$

$$= \int_0^L \int_0^{\pi} D_1(r)\hat{r}\cdot rd\hat{r} + \int_0^L \int_{\pi}^{2\pi} D_2(r)\hat{r}\cdot rd\hat{r} = \int_0^L \int_0^{\pi} \varepsilon_1 E(r)\hat{r}\cdot rd\hat{r} + \int_0^L \int_{\pi}^{2\pi} \varepsilon_2 E(r)\hat{r}\cdot rd\hat{r} \tag{2}$$

$$= \pi r L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E(r) = \lambda L \tag{3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{\pi r L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \tag{4}$$

¿Que si dividimos la esfera en n secciones de igual tamaño con distintas permitividades? Se puede generaralizar el reusltado anterior:

$$\oint_r \vec{D}\cdot d\vec{S} = \frac{2\pi}{n} rL \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \tag{5}$$

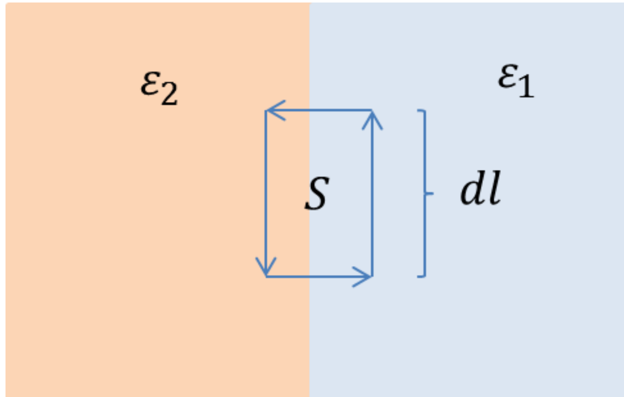
Si $n \to \infty$, entonces $\frac{2\pi}{n} \to d\phi$ y $\varepsilon_i \to \varepsilon(\phi)$. Por lo tanto:

$$\oint_r \vec{D}\cdot d\vec{S} = rL\int_0^{2\pi} \varepsilon(\phi)d\phi = \lambda L \tag{6}$$

Para calcular el campo eléctrico en el resto del espacio, basta hacer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$, o en el caso más general $\varepsilon(\phi) = \varepsilon_0$

2 Solución P2

Primero encontramos las relaciones que deben satisfacer los campos en las distintas zonas, usamos el hecho de que $\nabla \times \vec{E} = 0$, como las placas son infinitas, supondremos que el campo es vertical y de valor constante, distinto en cada zona ($\vec{E} = E\hat{y}$). Integramos sobre el camino que se muestra abajo:



$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{dr} = (E_1 - E_2)dl = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{dS} = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = E \tag{8}$$

Supondremos que en la parte izquierda de la placa inferior, la carga **libre** se distribuye con densidad σ_2, y en la parte derecha con σ_1, y hacemos un cilindro infinitesimal en el borde:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = D_2 dS = Q_l = \sigma_2 dS \tag{9}$$

$$\Rightarrow D_2 = \epsilon_2 E_2 = \epsilon_2 E = \sigma_2 \tag{10}$$

Análogamente para la sección derecha:

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_1 E = \sigma_1 \tag{11}$$

Por otro lado, tenemos que la carga total **libre** viene dada por:

$$\frac{A}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = Q_l \tag{12}$$

Reemplazando lo obtenido en las ecuaciones (9) y (10):

$$\frac{A}{2}E(\epsilon_1 + \epsilon_2) = Q_l \tag{13}$$

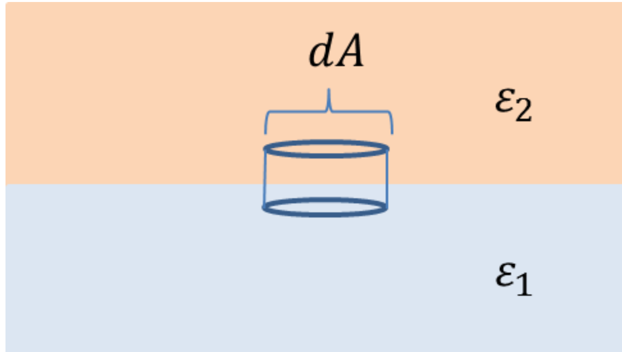
$$E = \frac{2Q_l}{A(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \tag{14}$$

$$\Rightarrow \Delta V = E \cdot d = \frac{2Q_l d}{A(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \tag{15}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_l}{\Delta V} = \frac{A(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2d} = \frac{A\epsilon_1}{2d} + \frac{A\epsilon_2}{2d} \tag{16}$$

Notemos que la capacitancia total es equivalente a la de 2 capacitancias de área $\frac{A}{2}$ y separación d y permitividad diferente, puestas en paralelo.

Usamos el echo de que $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, nuevamente suponemos que el campo es vertical y de valor constante, distinto para cada onda, calculamos el flujo a través de un cilindro infinitesimal ubicado en la interfaz entre los 2 medios:



$$\oint_{cilidro} \vec{D} \cdot d\vec{S} = (D_2 - D_1)dA = 0 \tag{17}$$

$$\Rightarrow \epsilon_1 \vec{E_1} = \epsilon_1 \vec{E_2} \tag{18}$$

Supondremos que en la placa inferior la carga de distribuye con densidad $\sigma = \frac{Q_l}{A}$, análogo a la ecuación (9), tenemos que:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{Q_l}{A\epsilon_1} \tag{19}$$

$$E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 = \frac{Q_l}{A\epsilon_2} \tag{20}$$

Calculamos la diferencia de potencial, y con ella la capacitancia:

$$\Rightarrow \Delta V = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{Qd}{2A}(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}) \tag{21}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2A}{d}(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2})^{-1} = (\frac{d}{2A\epsilon_1} + \frac{d}{2A\epsilon_2})^{-1} \tag{22}$$

Notemos que lo anterior corresponde a la capacitancia de 2 condensadores, de área A y separación $\frac{d}{2}$ y permitividad diferente, puestos en serie.