FI2002-1 Electromagnetismo
Profesor: Patricio Cordero
Auxiliares: Fabián Álvarez & Nicolás Parra

Pauta auxiliar 5

17 de octubre de 2018

1 Relaciones Útiles

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1}$$

$$\vec{J})=g\vec{E} \tag{2}$$

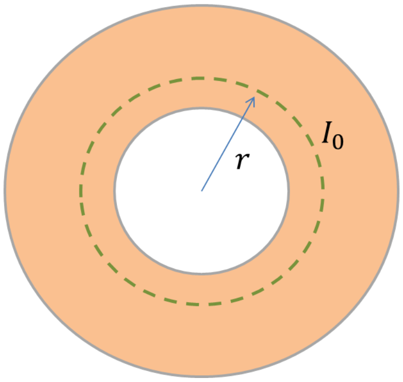
2 Soluciones

P1. Sabemos que sobre una superficie imaginaria de radio r, como se muestra en la figura, atraviesa una corriente I_0, supondremos que $\vec{J}=J(r)\hat{r}$:

$$I_0=\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=4\pi r^2 J(r) \tag{3}$$

$$\Rightarrow J(\vec{r})=\frac{I_0}{4\pi r^2}\hat{r} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{\vec{J}}{g(r)}=\frac{I_0 R_2}{4\pi r^3 g_0}\hat{r} \tag{5}$$



Definiremos $V(r=R_2)=0$, de modo que:

$$V(R_1) = -\int_{R_2}^{R_2} E(r)dr = \frac{I_0 R_2}{4\pi g_0}(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}) \tag{6}$$

Tenemos así la diferencia de potencial, si usamos la ley de Ohm (eq (3)) obtenemos la resistencia:

$$R = \frac{\Delta V}{I_0} = \frac{R_2}{4\pi g_0}(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}) \tag{7}$$

Notemos que la resistencia solo depende de la geometría y de g_0

P2. Como las esferas están muy alejadas entre si, supondremos que el campo que producen es el campo que producen 2 esferas con carga distribuida de manera uniforme, es decir:

$$E(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\hat{r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\hat{r_2} \tag{8}$$

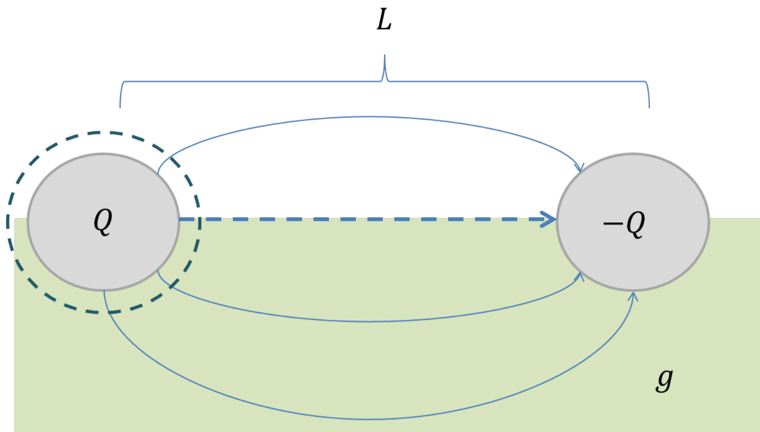
Necesitamos calcular la intensidad de corriente que circula por la tierra, para calcularla, lo que vamos a hacer es calcular el flujo de campo eléctrico a través de una esfera ligeramente más grande que la esfera con carga positiva:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{E} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{9}$$

Ahora bien, sabemos que solo la tierra presenta conductividad, por lo que solo nos interesa el flujo sobre el hemisferio inferior de la esfera sobre la cual estamos integrando. Por simetría, el flujo que pasa por el hemisferio superior es igual al flujo sobre el hemisferio inferior:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{E} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{E} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{10}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} g\vec{E} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{J} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = I = \frac{gQ}{2\epsilon_0} \tag{11}$$



Nos falta calcular la diferencia de potencial entre las esferas, para hacer esto, debemos integrar el campo eléctrico sobre un camino que vaya desde la superficie de la esfera con carga positiva hasta la superficie de la esfera con carga negativa. Elegimos el camino más sencillo, el cual el que va justo sobre la superficie de la tierra. Por principio de superposición, calculamos la diferencia de potencial que produce cada esfera por separado, y luego las sumaremos:

$$\Delta V_1 = \int_a^{L-a} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}) \tag{12}$$

$$\Delta V_2 = \int_{l-a}^{a} -\frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}) \tag{13}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}) \tag{14}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{g\pi}(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}) \tag{15}$$