FI2002-6 Electromagnetismo
Profesor: Patricio Cordero
Auxiliares: Fabián Álvarez & Nicolás Parra

Auxiliar 4: Preparación Control 1

10 de Octubre, 2018

Pequeño Resumen

Dada una configuración de carga, $\rho(\mathbf{r})$, podemos calcular su campo eléctrico en todo el espacio por la fórmula:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\,\mathrm{d}V' \tag{1}$$

Si fuese distribución lineal de cargas , se hace el cambio $\rho \to \lambda$, $\mathrm{d}V \to \mathrm{d}l$, y si fuese distribución superficial, se hace el cambio $\rho \to \sigma$, $\mathrm{d}V \to \mathrm{d}A$.
Dado que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0$, podemos asociar un potencial al campo eléctrico, de forma que $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}V$, y para calcular el potencial, usamos la fórmula:

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{2}$$

Donde en punto $\mathbf{r}_0$ generalmente exigimos que $V(\mathbf{r}_0) = 0$.
Otra propiedad del campo eléctrico, es que cumple con la ley de Gauss

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3}$$

y en su versión integral:

$$\oiint_{\partial V}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \tag{4}$$

Esta ley es sumamente poderosa para calcular el campo de configuraciones tienen algunas simetrías especiales (esférica, cilíndrica, planos). Por ejemplo, para una simetría esférica, se deduce que $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{r}$, y tomando $\mathrm{d}\mathbf{S} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{r}$, obtenemos que:

$$\oiint_{\partial V}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{5}$$

$$= 4\pi E(r)r^2 \tag{6}$$

Y apartir de la ley de Gauss se obtiene:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_V}{r^2}\hat{r} \tag{7}$$

El potencial eléctrico cumple con la llamada ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{8}$$

Un conductor es un objeto para el que se cumple que $\mathbf{E} = 0$ para todo punto interior. Esto implica dos cosas: la carga se concentra en su superficie, y un conductor es equipotencial. En presencia de un campo eléctrico externo, aparecerán densidades de carga inducidas sobre el conductor, que tratan de contrarrestar el campo externo de modo que siempre se tenga un campo nulo dentro suyo.
En medios materiales, el campo eléctrico se comporta de forma distinta. En general, un medio estará caracterizado por una polarización $\mathbf{P}$, que hará aparecer cargas de polarización:

$$\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_b \qquad\qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\rho_b \tag{9}$$

Que uno debería integrar si qusiera conocer el campo eléctrico. Se introduce el campo auxiliar desplazamiento eléctrico:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{10}$$

El desplazamiento también cumple una ley de Gauss

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_l \tag{11}$$

Siendo ρ_l la densidad de carga libre (no proviene de las polarizaciones). También tenemos su versión integral:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \rho_l \, \mathrm{d}V = Q_{Vl} \tag{12}$$

Para medios lineales e isótropos, la polarización se puede expresar como $\mathbf{P} = (\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0)\mathbf{E}$, de lo que se obtiene:

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r}) \, \mathbf{E} \tag{13}$$

De la ley de Gauss, y de $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$ se obtienen dos condiciones de borde, una para la componente tangencial o paralela a una interfaz, y la otra para la componente normal a la interfaz:

$$E_1^t = E_2^t \tag{14}$$

$$\epsilon_2 E_2^n - \epsilon_1 E_1^n = \sigma_l \tag{15}$$

Problemas

P1. Simetrías y Ley de Gauss: Considere las siguientes configuraciones y calcule el campo eléctrico en todo el espacio usando la ley de Gauss:

(a) Cascarón esférico de radio interior a y radio exterior b con densidad de carga $\rho(r) = kr^2$

(b) Dos planos infinitos paralelos, uno con densidad de carga σ y el otro con densidad de carga $-\sigma$

P2. Condiciones de Borde: A partir de las leyes que conoce del electromagnetismo, deduzca las condiciones de borde para el campo eléctrico.

P3. Potencial eléctrico: Se tiene un cascarón cilíndrico de radio a con una densidad de carga superficial σ_a, otro cascarón concéntrico de radio $b > a$ y densidad de carga superficial σ_b y un otro cascarón de radio c que contiene a los anteriores. Los valores de σ_a y σ_b no son conocidos. La región comprendida entre $a < r < b$ tiene una constante dieléctrica ϵ_a y la región $b < r < c$ tiene constante ϵ_b. En el resto del espacio hay vacío.

Se sabe, además, que la diferencia de potencial entre $r = c$ y $r = a$ es V (Es decir, $V = V(a) - V(c)$) y que la densidad σ_b es tal que la densidad de carga total en $r = b$ es nula.

(a) Determine los valores de σ_a y σ_b

(b) Si elegimos el potencial tal que $V(r = c) = 0$, determine el potencial en la región $a < r < c$

P4. Cargas de Polarización: Considere un cascaron esférico de radio a (dentro del cual solo hay vacío) y densidad superficial uniforme σ rodeado por tres regiones determinadas por los radios a, b y c : En la región $a < r < b$ hay un medio dieléctrico de constante ϵ_1, en la región $b < r < c$ el medio tiene constante ϵ_2 y en la región $c < r$ hay vacío.

(a) Encuentre el desplazamiento eléctrico en todo el espacio.

(b) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

(c) Encuentre las cargas de polarización (o cargas ligadas) y compruebe que la carga total de polarización es 0.

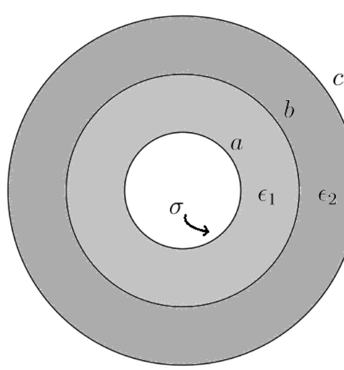

Figure 1: P4, robado de la aux 2