FI2002-1 Electromagnetismo
Profesor: Patricio Cordero
Auxiliares: Fabián Álvarez & Nicolás Parra

Pauta auxiliar 1: Introducción a la electrostática

24 de septiembre de 2018

1 Relaciones Útiles

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(\vec{r}_0) \tag{2}$$

2 Soluciones

P1. Para este problemas usamos el principio de superposición, esto es, imaginamos que tenemos una esfera solidad de radio R y densidad ρ_0, y le superponemos una esfera de radio a con densidad $-\rho_0$ lo que es equivalente a hacerle el hueco a la esfera grande. Nos ubicamos en el centro de la esfera mayor y calculamos el campo eléctrico que hay en su interior, para esto aplicamos la ley de Gauss: Imaginamos una esfera de radio $r < R$ y calculamos el flujo de campo eléctrico a través de su superficie, por simetría suponemos que $\vec{E_R} = E_R(r)\hat{r}$:

$$\int_{V_r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E_R}) dV = \oint_{\partial V_r} \vec{E_R} \cdot d\vec{S} = \int_{V_r} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} dV = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\partial V_r} \vec{E_R} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_R(r)\hat{r} \cdot (r^2 sen(\theta) d\theta d\phi \hat{r}) = 4\pi r^2 E_R(r) \tag{3}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_R(r) = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E_R}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r} \tag{4}$$

Ahora nos ubicamos en el centro de la esfera más pequeña, y de forma análoga, calculamos el campo que produce a una distancia $r' < a$ de su centro:

$$\vec{E_a}(\vec{r'}) = -\frac{\rho_0 r'}{3\varepsilon_0}\hat{r'} \tag{5}$$

Ahora calcularemos el campo total para un punto $\vec{r}$ que este justo en el hueco, sumando los campos calculados previamente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E_R}(\vec{r}) + \vec{E_a}(\vec{r'}) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}(r\hat{r} - r'\hat{r'}) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r'}) \tag{6}$$

Notemos que $\vec{r} = \vec{d} + \vec{r'} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r'} = \vec{d}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{d} \tag{7}$$

P2. Calcularemos el campo eléctrico por zonas, primero consideremos el flujo de campo eléctrico a través de un cilindro imaginario de radio $r < a$ y largo L, y aplicaremos la ley de Gauss, suponemos que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ en coordenadas cilíndricas:

$$\oint_{\partial V_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r)\hat{r} \cdot (rsen(\phi)dzd\phi\hat{r}) = 2\pi rLE(r) \tag{8}$$

Por otro lado, calculamos la carga encerrada por este cilindro:

$$\int_{V_r} \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho_0 r}{a} rdrd\phi dz = \frac{2\pi L\rho r^3}{3a\varepsilon_0} \tag{9}$$

Despejando $E(r)$ de las ultimas 2 ecuaciones obtenemos:

$$E(r) = \frac{\rho r^2}{3a\varepsilon_0} \tag{10}$$

Para $r \in [a, b)$ hacemos lo mismo, pero para la parte de la carga encerrada solo integramos hasta $r = a$, pues fuera de esa región la densidad de carga es nula:

$$\oint_{\partial V_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r)\hat{r} \cdot (rsen(\phi)dzd\phi\hat{r}) = 2\pi rLE(r) \tag{11}$$

Por otro lado, calculamos la carga encerrada por este cilindro:

$$\int_{V_r} \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_0 r}{a} rdrd\phi dz = \frac{2\pi L\rho a^2}{3\varepsilon_0} \tag{12}$$

Despejando $E(r)$ de las ultimas 2 ecuaciones obtenemos:

$$E(r) = \frac{\rho a^2}{3r\varepsilon_0} \tag{13}$$

Para $r \in [b, b + \delta)$ el campo eléctrico es nulo, pues es un conductor.

Para $r > b + \delta$, hacemos lo mismo que en el segundo caso, pero cuando calculamos la carga encerrada, agregamos Q, pues por enunciado el conductor tiene esa carga total, tenemos así:

$$\oint_{\partial V_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r)\hat{r} \cdot (rsen(\phi)dzd\phi\hat{r}) = 2\pi rLE(r) \tag{14}$$

Por otro lado, calculamos la carga encerrada por este cilindro:

$$\int_{V_r} \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_0 r}{a} rdrd\phi dz = \frac{2\pi L\rho a^2}{3\varepsilon_0} + \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{15}$$

Despejando $E(r)$ de las ultimas 2 ecuaciones obtenemos:

$$E(r) = \frac{\rho a^2}{3r\varepsilon_0} + \frac{Q}{r\varepsilon_0} \tag{16}$$

Ahora calculamos el potencial eléctrico, para eso fijamos el potencial en algún punto, de manera arbitraria diremos que $V(r = 0) = 0$. Calculamos el potencial para algún punto en $r < a$:

$$V(r) = -\int_0^r E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} + V(0) = -\int_0^r \frac{\rho_0 r^2}{3a\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho_0 r^3}{9a\varepsilon_0} \tag{17}$$

Ahora calculamos el potencial para $r \in [a, b)$, en este caso usamos como referencia un potencial que ya conozcamos, como el potencial en $r = a$, hacemos esto porque es requisito que el potencial eléctrico sea una función **continua** en el espacio:

$$V(r) = -\int_a^r E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} + V(a) = -\int_a^r \frac{\rho_0 a^2}{3r\varepsilon_0}dr - \frac{\rho_0 a^2}{9\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}ln(\frac{r}{a}) - \frac{\rho_0 a^2}{9\varepsilon_0} \tag{18}$$

En el conductor el potencial es constante, pues no hay campo eléctrico, tomamos como referencia ahora el potencial en $r = b$:

$$V(r) = -\int_b^r E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} + V(b) = -\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}ln(\frac{b}{a}) - \frac{\rho_0 a^2}{9\varepsilon_0} \tag{19}$$

El potencial en la última zona quedará propuesto.

Ahora solo basta determinar las densidades de carga en el conductor, como se mencionó antes, en un conductor el campo eléctrico debe ser nulo, esto se manifiesta como la aparición de densidades de cargas de superficies en los bordes del conductor, si bien el conductor del problema tiene carga Q, esta no se distribuye en el volumen sino que solo se distribuye por los bordes, llamemos a estas densidades $\sigma_{in}, \sigma_{out}$ donde el subíndice indica si es la densidad de la cara interior o exterior del casquete cilíndrico.Importante: Si la carga del conductor fuera $Q = 0$, igual aparecerían estas densidades de carga, pero con la condición de que la carga total del conductor sume 0. ¿Como calculamos σ_{in}? Hacemos un cilindro imaginario de radio $r \in [b, b + \delta]$ que encierre la cara interior del casquete, aplicamos la ley de Gauss sobre este cilindro y usamos el hecho de que el campo es nulo dentro del conductor, por lo tanto:

$$\oint_{\partial V_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{20}$$

Por otro lado, calculamos la carga encerrada por este cilindro:

$$\int_{V_r} \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}dV + \int_{C_{in}} \frac{\sigma_{in}}{\varepsilon_0}dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_0 r}{a} r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{in}}{\varepsilon_0} b d\phi dz = \frac{2\pi L\rho a^2}{3\varepsilon_0} + \frac{2\pi bL\sigma_{in}}{\varepsilon_0} \tag{21}$$

Igualando las ultimas 2 expresiones, llegamos a una ecuación para σ_{in}. Para obtener σ_{out}, basta con imponer que la carga total en el conductor debe sumar Q.

P3. Sabemos que Φ es el flujo de campo a traves de una superficie esférica de radio r, con lo que tenemos que

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi r Q}{b\varepsilon_0}e^{\frac{-r}{R}} \tag{22}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{br\varepsilon_0}e^{\frac{-r}{R}} \tag{23}$$

Para obtener la densidad de carga recordamos la relación (1), de modo que:

$$\rho(r) = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial E(r)}{\partial r}) \tag{24}$$

Recordemos que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie dada es proporcional a la carga encerrada en ella, tenemos así que:

$$\Phi = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \tag{25}$$

$$Q(r) = \frac{Q}{br} e^{\frac{-r}{R}} \tag{26}$$

Ahora para calcular la carga total en el sistema, basta tomar $r \to \infty$:

$$Q_T = \lim_{r \to \infty} Q(r) = 0 \tag{27}$$