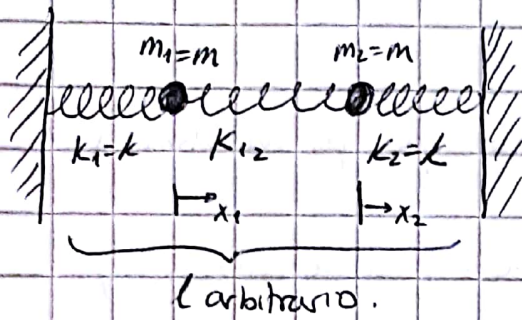


Auxiliar 6: Oscilaciones acopladas

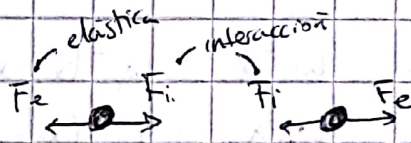


Posición de equilibrio de las masas es la misma que la de los resortes

- a) Ecuaciones de movimiento de las m_1 y m_2
 (Utilizar 2 métodos distintos)
 $\hookrightarrow$ Newton, Lagrange.

i) Newton:

Ley de Hooke $F_e = -k(x - x_0)$



$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - 0) + k_{12}(x_2 - x_1) = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k_{12}(x_2 - x_1) = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1)$$

ii) E-L

$$L = K - U = K_1 + K_2 - (U_1 + U_2 + U_3)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \quad K_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$U_1 = \frac{1}{2} k x_1^2 \quad U_2 = \frac{1}{2} k x_2^2 \quad U_3 = \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - x_1)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - x_1)^2$$

Coordenadas generalizadas (x_1, x_2) E-L $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$

$$x_1) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m \dot{x}_1) - (-kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1)) = 0$$

$$\Rightarrow m \ddot{x}_1 = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1)$$

$$x_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$m \ddot{x}_2 = -kx_2 + k_{12}(x_2 - x_1)$$

volvimos a las mismas ecuaciones que por Newton ☺

b) Encuentre las frecuencias y amplitudes características y
lleve a la solución general del sistema

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$$

← soluciones propuestas.
Ansatz

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_i^2 = \frac{k_{12}}{m}$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \omega_i^2 (x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - \omega_i^2 (x_2 - x_1)$$

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t} \rightarrow A_1 (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega_0^2 A_1 e^{i\omega t} - \omega_i^2 A_2 e^{i\omega t} + \omega_i^2 A_1 e^{i\omega t}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \omega^2 A_1 = -\omega_0^2 A_1 + \omega_i^2 A_2 - \omega_i^2 A_1$$

$$x_2(t) = A_2 e^{i\omega t} \xrightarrow{\textcircled{2}} -\omega^2 A_2 = -\omega_0^2 A_2 - \omega_i^2 A_2 + \omega_i^2 A_1$$

→ se suman ambas ecuaciones.

$$-\omega^2 (A_1 + A_2) = -\omega_0^2 (A_1 + A_2) \Rightarrow \omega = \pm \omega_0$$

$(A_1, A_2) > 0$

frecuencia natural

→ se restan ambas

$$-\omega^2 (A_1 - A_2) = -\omega_0^2 (A_1 - A_2) - 2\omega_i^2 (A_1 - A_2)$$

asumimos
 $A_1 \neq A_2$

$$\Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_i^2}$$

⇒ 4 frecuencias ... hay 2 modos de vibración
la frecuencia natural y "algo más".

¿Qué tipo de movimiento es?

Para ver el tipo de movimiento reemplazamos en las soluciones

1) $\omega = \omega_0$ ($\pm$)

$$-\omega_0^2 A_1 = -\omega_0^2 A_1 + \omega_1^2 A_2 - \omega_1^2 A_1$$

$$\Rightarrow 0 = \omega_1^2 (A_2 - A_1) \Rightarrow A_1 = A_2$$

2) $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}$

$$-(\omega_0^2 + 2\omega_1^2) A_2 = -\omega_0^2 A_2 - \omega_1^2 A_2 + \omega_1^2 A_1$$

$$-2\omega_1^2 A_2 = -\omega_1^2 A_2 + \omega_1^2 A_1$$

$$\Rightarrow 0 = \omega_1^2 A_2 + \omega_1^2 A_1 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

Ahora queremos llegar a la solución general usando todo lo anterior.

$$\omega^2 = \omega_0^2$$

$$X_1(t) = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} \quad ; \quad X_2(t) = X_1(t)$$

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}$$

$$X_1(t) = B_+ e^{i\omega t} + B_- e^{-i\omega t}$$

$$B_+ = -C_+$$

$$X_2(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$B_- = -C_-$$

c) Cambio de variables a coordenadas normales

$$\eta_1 = x_2 - x_1 \quad \eta_2 = x_1 + x_2$$

posición 1 y 2

Resuelva el sistema desacoplado y encuentre $X_{1,2}(t)$

$$\left[\begin{matrix} X_2(t) = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \\ X_1(t) = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \end{matrix} \right] \Leftarrow \text{A esto queremos llegar}$$

① $\ddot{X}_1 = -\omega_0^2 X_1 + \omega_1^2 (X_2 - X_1)$

② $\ddot{X}_2 = -\omega_0^2 X_2 + \omega_1^2 (X_2 - X_1)$

sumar ① y ②

$$(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2) = -\omega_0^2 (X_1 + X_2)$$

$$(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2) = -\omega_0^2 (X_1 + X_2) \Leftrightarrow \ddot{\eta}_2 = -\omega_0^2 \eta_2$$

Restar ① y ②

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1) &= -\omega_1^2 (x_2 - x_1) - 2\omega_1^2 (x_2 - x_1) \\ \ddot{z}_1 &= -(\omega_0^2 + 2\omega_1^2) z_1 \end{aligned}$$

Definición: Modo Normal $\ddot{q}_i + f(q_i) = 0$

$$z_1(t) = A_+ e^{i\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2} t} + A_- e^{-i\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2} t}$$

$$z_2(t) = B_+ e^{i\omega_0 t} + B_- e^{-i\omega_0 t}$$

→ $x_1(t), x_2(t)$