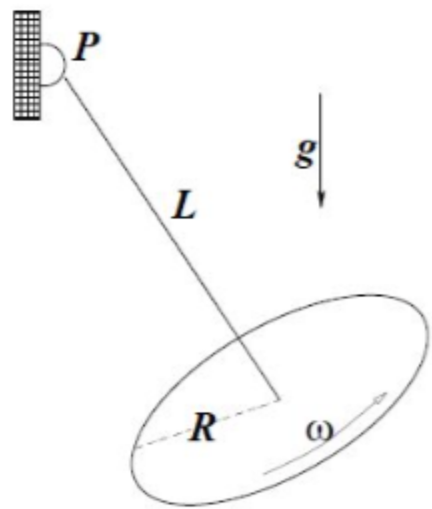
Problemas

1. *Disco sujeto a vara sujeta en un punto [8.4 Apunte Cordero]*

   Se tiene una especia de péndulo que consta de una vara de masa despreciable y largo L que solo puede girar en un plano vertical en torno a un punto fijo P. En su extremo libre la vara tiene un disco de densidad uniforme (radio R y masa M) en forma perpendicular a la vara. El disco gira con respecto a la vara (ella como eje) con velocidad angular ω. Determine el momento angular, la matriz de inercia, la velocidad angular y las ecuaciones de movimiento.



Desarrollo del Problema

Iremos definiendo término a término las distintas variables relevantes:

- Torque τ. Las fuerzas presentes sobre el disco son la tensión y el peso, vemos que la tensión no hará torque claramente ($\tau_T = r\hat{r} \times (-T\hat{r}) = 0$) por tanto debemos calcular la contribución del peso:

$$\tau = r\hat{r} \times Mg\hat{k} = L\hat{r} \times Mg(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) = -MgL\sin\theta\hat{\phi} \tag{1}$$

  Donde se considera que $\hat{k}$ apunta hacia abajo, y θ se encuentra entre el eje vertical y la vara.

- Velocidad angular $\vec{\Omega}$. Aquí se debe tener cuidado de considerar dos velocidades angulares: la que existe debido a ω y esta apuntará en la dirección $-\hat{r}$, y la que aparece debido al cambio de θ, entonces:

$$\vec{\Omega} = -\omega\hat{r} + \dot{\theta}\hat{\phi} \tag{2}$$

- Inercia $\mathbb{I}$. Ya se conoce la matriz de inercia para un disco, aquí se debe tener en cuenta que el centro de masa G del disco está desplazado por un vector $L\hat{r}$ del punto de giro P, por tanto:

$$\mathbb{I}^P_{ij} = \mathbb{I}^G_{ij} + (R^2\delta_{ij} - R_iR_j) \tag{3}$$

Donde $\vec{R} = L\hat{r}$, o sea $R_r = L$ y $R_\theta = R_\phi = 0$, con eso nos queda que:

$$\mathbb{I}^P = \begin{bmatrix} I_{\theta\theta} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rr} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Con $I_{\theta\theta} = I_{\phi\phi} = \frac{1}{4}MR^2 + ML^2$ y $I_{rr} = \frac{1}{2}MR^2$, donde se debe tener cuidado de orientar los ejes θ y ϕ de modo que se ubiquen en el plano del disco, tal como ocurre en la figura.

- Cálculo del momentum angular $\vec{l}$. Para esto se usa simplemente el hecho de que $\vec{l} = \mathbb{I}\vec{\Omega}$, entonces:

$$\vec{l} = \begin{bmatrix} I_{\theta\theta} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ -\omega \end{bmatrix} = -\omega I_{rr}\hat{r} + I_{\phi\phi}\dot{\theta}\hat{\phi} \tag{5}$$

- Ecuación de movimiento. Se debe cumplir que $\dot{\vec{l}} = \tau$ entonces:

$$\dot{\vec{l}} = -\omega I_{rr}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}) + I_{\phi\phi}(\ddot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\theta}(-\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta})) \tag{6}$$

Haciendo el balance entre el momentum y el torque nos queda:

$$\hat{r}) \quad - I_{\phi\phi}\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta = 0 \tag{7}$$

$$\hat{\theta}) \quad - \omega I_{rr}\dot{\theta} - I_{\phi\phi}\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta = 0 \tag{8}$$

$$\hat{\phi}) \quad I_{\phi\phi}\ddot{\theta} - \omega I_{rr}\dot{\phi}\sin\theta = -MgL\sin\theta \tag{9}$$

2. *Sistema de dos masas sin gravedad [Kim Hauser P.6.9]*

En un ambiente sin gravedad considere un anillo de masa m que desliza sin roce a lo largo de una barra. El anillo está unido a una partícula de masa m, a través de una cuerda de largo L como se muestra en la figura. En el instante iniicla, con la cuerda completamente extendida y la partícula colocada junto a la barra se imprime una velocidad v_0 a esta última, en dirección perpendicular a la barra. Encuentre $\dot{\phi}(\phi)$ y $N(\phi)$.

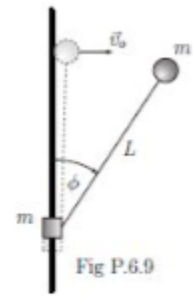


Fig P.6.9

Desarrollo del Problema

El origen O se ubicará en la posición inicial del anillo y el origen O' lo seguirá, se considerará que el vector unitario $\hat{\imath}$ apunta hacia arriba y $\hat{\jmath}$ hacia la derecha, para ambos sistemas.

Describiremos el movimiento de la partícula como sigue:

$$\vec{R} = x\hat{i} \tag{10}$$

$$\vec{\Omega} = 0 \tag{11}$$

$$\vec{a}' = -L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi} \tag{12}$$

$$\vec{F} = -T\hat{\rho} \tag{13}$$

$$T\cos\phi = m\ddot{x} \quad T\sin\phi = N \tag{14}$$

La última ecuación viene de hacer un balance de fuerzas sobre el anillo sujeto a la barra. Con esta información podemos plantear lo siguiente:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \tag{15}$$

$$-mL\dot{\phi}^2\hat{\rho} + mL\ddot{\phi}\hat{\phi} = -T\hat{\rho} - m\ddot{x}\hat{i}' \tag{16}$$

$$-mL\dot{\phi}^2\hat{\rho} + mL\ddot{\phi}\hat{\phi} = -T\hat{\rho} - m\ddot{x}(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}) \tag{17}$$

Con esto llegamos al siguiente sistema de ecuaciones (incluyendo el balance de fuerzas sobre el anillo):

$$-mL\dot{\phi}^2 = -T - m\ddot{x}\cos\phi \tag{18}$$

$$mL\ddot{\phi} = m\ddot{x}\sin\phi \tag{19}$$

$$T\cos\phi = m\ddot{x} \tag{20}$$

$$N = T\sin\phi \tag{21}$$

Con esto llegamos al siguiente sistema de ecuaciones (incluyendo el balance de fuerzas sobre el anillo):

$$-mL\dot{\phi}^2 = -T - m\ddot{x}\cos\phi \tag{18}$$
$$mL\ddot{\phi} = m\ddot{x}\sin\phi \tag{19}$$
$$T\cos\phi = m\ddot{x} \tag{20}$$
$$N = T\sin\phi \tag{21}$$

De la ecuación 20 podemos despejar $m\ddot{x}$ para reemplazarlo en la ecuación 18, despejar $m\ddot{x}$ en términos de ϕ y esto reemplazarlo en la ecuación 19, y queda:

$$-mL\dot{\phi}^2 = -m\ddot{x}\left(\frac{1+\cos^2\phi}{\cos\phi}\right) \tag{22}$$
$$mL\ddot{\phi} = \frac{mL\dot{\phi}^2}{\left(\frac{1+\cos^2\phi}{\cos\phi}\right)}\sin\phi \tag{23}$$
$$\rightarrow mL\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = mL\dot{\phi}^2\frac{\sin\phi\cos\phi}{1+\cos^2\phi} \tag{24}$$
$$\frac{1}{\dot{\phi}}d\dot{\phi} = \frac{\sin\phi\cos\phi}{1+\cos^2\phi}d\phi \tag{25}$$

Donde las condiciones iniciales serían que en $t=0$, $\phi = 0$ y $\dot{\phi} = \frac{v_0}{L}$, con esto podemos calcular $\dot{\phi}$ en términos de ϕ.