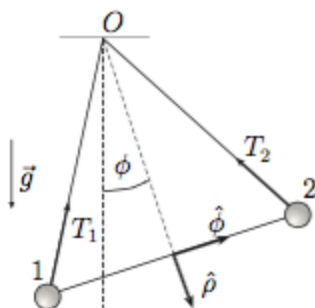


P.2.17

Tres varas ideales (perfectamente rígidas y de masa despreciable) forman un triángulo equilátero de lado D . El vértice O está fijo en el techo mientras que los otros dos vértices tienen partículas de masa m . El sistema oscila, en el plano del dibujo, en torno al punto fijo O . La condición inicial es $\phi(0) = \phi_o$ y $\dot{\phi}(0) = 0$. En lo que sigue puede usar, por cada fuerza $\vec{F}$ que desconozca, la forma $\vec{F} = f\hat{f}$, donde f es un escalar desconocido y $\hat{f}$ sí debiera ser conocido.

- (a) Obtenga las expresiones para los momentos angulares $\vec{l}_O$, $\vec{l}_O^{(G)}$ y $\vec{l}_G$ sin hacer uso de la relación que existe entre estos tres vectores.
- (b) Obtenga los torques $\vec{\tau}_O$, $\vec{\tau}_O^{(G)}$ y $\vec{\tau}_G$ sin hacer uso de la relación que existe entre estos tres vectores y escriba las ecuaciones a las que conduce cada una de las tres ecuaciones del tipo $\dot{\vec{l}} = \vec{\tau}$.
- (c) Encuentre la(s) condición(es) para que las ecuaciones anteriores sean consistentes entre sí.
- (d) Integre una vez la ecuación a la que todas se redujeron.
- (e) Escriba la ecuación de movimiento (2^{da} ley) del centro de masa y, usando esto con todo lo anterior, obtenga en forma totalmente explícita la fuerza externa total. Escriba además, la fuerza (función de ϕ) que el techo ejerce para mantener fijo al punto O .

(a)



En este problema será muy útil tener definidas las coordenadas polares que se muestran en la figura, asociadas al ángulo ϕ que define cualquier posición del sistema. Bajo este sistema de coordenadas, podemos descomponer $\vec{g}$ y escribir la posición de las masas 1 y 2 desde el origen O .

$$\vec{g} = \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\vec{r}_{1O} = \frac{\sqrt{3}}{2} D \hat{\rho} - \frac{1}{2} D \hat{\phi}, \quad \vec{r}_{2O} = \frac{\sqrt{3}}{2} D \hat{\rho} + \frac{1}{2} D \hat{\phi}$$

También tendremos que tener la posición del centro de masa G y la posición de cada partícula vista desde G como origen:

$$\vec{r}_G = \frac{\sqrt{3}}{2} D \hat{\rho}, \quad \vec{r}_{1G} = -\frac{D}{2} \hat{\phi}, \quad \vec{r}_{2G} = \frac{D}{2} \hat{\phi}.$$

Dejo al estudiante el cálculo explícito de $\vec{l}_O$, $\vec{l}_O^{(G)}$ y $\vec{l}_G$, advirtiéndole con énfasis que es necesario conocer a cabalidad su significado: el subíndice indica *con respecto a qué punto* estoy midiendo los vectores posición de las partículas. El superíndice (G) quiere decir que se calcula como si el sistema fuera una sola partícula en G con la masa de todo el sistema (en este caso $2m$). Estos cálculos entregan:

$$\begin{aligned} \vec{l}_O &= \Sigma m \vec{r}_{iO} \times \vec{v}_{iO} = 2mD^2 \dot{\phi} \hat{k} \\ \vec{l}_O^{(G)} &= 2mD^2 \frac{3}{4} \dot{\phi} \hat{k} = \frac{3}{2} mD^2 \dot{\phi} \hat{k} \\ \vec{l}_G &= \frac{1}{2} mD^2 \dot{\phi} \hat{k} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \vec{\tau}_O = \Sigma \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_{ext(i)}, \quad \vec{\tau}_O^G = \vec{r}_G \times \vec{F}_{ext}, \quad \vec{\tau}_G = \Sigma \vec{r}_{iG} \times \vec{F}_{ext(i)}.$$

Debe notarse en este punto que la tensión de la barra que une las dos masas es una fuerza interna, que no altera la dinámica del sistema; comprobar lo anterior puede ser de gran utilidad para la comprensión del lector.

Lo que aún nos falta escribir son las tensiones T_1 y T_2 según las coordenadas que estamos usando.

$$(b) \vec{\tau}_O = \Sigma \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_{ext(i)}, \quad \vec{\tau}_O^G = \vec{r}_G \times \vec{F}_{ext}, \quad \vec{\tau}_G = \Sigma \vec{r}_{iG} \times \vec{F}_{ext(i)}.$$

Debe notarse en este punto que la tensión de la barra que une las dos masas es una fuerza interna, que no altera la dinámica del sistema; comprobar lo anterior puede ser de gran utilidad para la comprensión del lector.

Lo que aún nos falta escribir son las tensiones T_1 y T_2 según las coordenadas que estamos usando.

$$\vec{T}_1 = -T_1 \cos(\pi/6)\hat{\rho} + T_1 \sin(\pi/6)\hat{\phi}, \quad \vec{T}_2 = -T_2 \cos(\pi/6)\hat{\rho} - T_2 \sin(\pi/6)\hat{\phi}.$$

De esta manera, las fuerzas externas sobre la partícula i (omitiendo el aporte de la tensión interna) y la fuerza total externa son:

$$\vec{F}_{ext(i)} = m\vec{g} + \vec{T}_i, \quad \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{ext(1)} + \vec{F}_{ext(2)}$$

y, por lo tanto, los torques resultan:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= -\sqrt{3}Dmg \sin \phi \hat{k} \\ \vec{\tau}_O^{(G)} &= (-\sqrt{3}Dmg \sin \phi + \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_1 - T_2))\hat{k} \\ \vec{\tau}_G &= \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_2 - T_1)\hat{k} \end{aligned}$$

Haciendo $\dot{\vec{l}} = \vec{\tau} (*)$ para cada caso:

$$\begin{aligned}\vec{r}_O &= -\sqrt{3}Dmg \sin \phi \hat{k} \\ \vec{r}_O^{(G)} &= (-\sqrt{3}Dmg \sin \phi + \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_1 - T_2))\hat{k} \\ \vec{r}_G &= \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_2 - T_1)\hat{k}\end{aligned}$$

Haciendo $\dot{l} = \vec{r} (*)$ para cada caso:

$$\begin{aligned} (*)_O \quad 2mD^2\ddot{\phi} &= -\sqrt{3}Dmg \sin \phi \\ (*)_O^{(G)} \quad \frac{3}{2}mD^2\ddot{\phi} &= (-\sqrt{3}Dmg \sin \phi + \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_1 - T_2)) \\ (*)_G \quad \frac{1}{2}mD^2\ddot{\phi} &= \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_2 - T_1)\end{aligned}$$

(c) De las ecuaciones anteriores se deduce que, para cualquier valor de ϕ , $T_1 - T_2 = mg \sin \phi$.

(d) Con la ecuación anterior, las 3 ecuaciones son equivalentes a la primera: $\ddot{\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{g}{D} \sin \phi$.
Entonces,

$$\dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{g}{D} \sin \phi \Rightarrow \int_{\phi_o}^{\phi} \dot{\phi} d\dot{\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{g}{D} \int_{\phi_o}^{\phi} \sin \phi d\phi,$$

lo que con las condiciones iniciales $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_o = 0$ y $\phi(0) = \phi_o$ implica:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g\sqrt{3}}{D}(\cos \phi - \cos \phi_o)$$

(e) La 2ª ley de Newton para el centro de masa G es: $\vec{F}_{EXT} = M\vec{A}_G$, donde, en este caso, $M = 2m$ y $\vec{A}_G = \vec{r}_G = -\frac{D\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{D\sqrt{3}}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi}$.

La fuerza externa total sobre el sistema son las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ y la gravedad que actúa sobre cada masa, $\vec{F}_{EXT} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + 2m\vec{g}$.

Separada ya en ecuaciones escalares según $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ la ecuación de movimiento es:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}) \quad & -\frac{\sqrt{3}}{2}(T_1 + T_2) + 2mg \cos \phi = -D\sqrt{3}m\dot{\phi}^2 \\ \hat{\phi}) \quad & \frac{1}{2}(T_1 - T_2) - 2mg \sin \phi = D\sqrt{3}m\ddot{\phi}\end{aligned}$$

La ecuación $\hat{\phi}$) es equivalente a la ecuación $(*)_O^{(G)}$. Si miramos la parte (d), podemos reemplazar $\dot{\phi}^2$ en $\hat{\rho}$), y junto con la ecuación de la parte (c), tendremos el sistema de ecuaciones para T_1 y T_2 , cuya solución es:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{mg}{2} \sin \phi + \frac{5\sqrt{3}mg}{3} \cos \phi - \sqrt{3}mg \cos \phi_o \\ T_2 &= -\frac{mg}{2} \sin \phi + \frac{5\sqrt{3}mg}{3} \cos \phi - \sqrt{3}mg \cos \phi_o \end{aligned}$$

Bajo la asumida suposición de que las barras transmiten la tensión de manera instantánea, tendremos que la reacción del techo debe ser, simplemente $\vec{F}_T = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2$.