

Aug 13

P11

$$U(r) = a^2 \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Partimos de la energía mecánica total:

$$E_M = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 + U(r)$$

Sistemas que podemos trabajar en un plano (Coordenadas cil.)

$$\Rightarrow \vec{r} = r \hat{r} \rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + \dot{\varphi} r \hat{\varphi}$$

pero $\dot{\varphi} r^2 = \text{cte} \rightarrow$ conservación de mom.
o) No fuerzas en $\hat{\varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} r^2) = 0$

$$\Rightarrow l_z = m r^2 \dot{\varphi} = l_0 \text{ cte}$$

$$\Rightarrow \boxed{r \dot{\varphi} = \frac{l_0}{m r}}$$

$$\therefore \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m l_0^2}{2 m^2 r^2}$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l_0^2}{2 m r^2} + a^2 \log\left(\frac{r}{r_0}\right)}_{= U_{\text{eff}}}$$

⊕ Sabemos que para que sea una órbita circular, $\dot{r} = 0$ y $U'_{\text{eff}} = 0$

Derivando $U_{\text{eff}} \Rightarrow U'_{\text{eff}} = \frac{-2 l_0^2}{2 m r^3} + \frac{a^2}{r}$

↳ Imponemos que $l_0 = m r_c^2 \omega_0$ e igualamos a cero

$$\Rightarrow \frac{m r_c^4 \omega_0^2}{m r_c^3} = \frac{a^2}{r_c} \Rightarrow r_c^2 = \frac{a^2}{m \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow r_c = \frac{a}{\omega_0} \sqrt{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow l_0 = \frac{a^2}{\omega_0}$$

b) Sabemos que para encontrar $\omega_{p.o.}$ necesitamos U_{eff}''

$$\Rightarrow U_{eff}'' \Big|_{r_c} = \frac{3l_0^2}{m r_c^4} - \frac{a^2}{r_c^2} \Big|_{r=r_c} = \frac{3l_0^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^4 m^2}{a^4} - \frac{a^2 \cdot \omega_0^2 m}{a^2}$$

$$= \frac{3a^4}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0^4 m}{a^4} - \omega_0^2 m \quad \leftarrow \alpha$$

$$= 2\omega_0^2 m = \omega_{p.o.}^2 \cdot m$$

$$\Rightarrow \omega_{p.o.} = \omega_0 \sqrt{2}$$

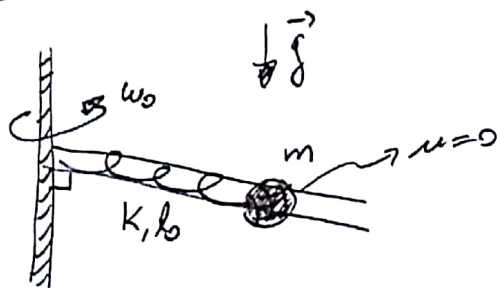
Notamos que $U_{eff}''(r_c) > 0$ por lo que corroboramos que $r=r_c$ es un mínimo

Para que sea una órbita cerrada necesitamos que $\frac{\omega_{p.o.}}{\omega_0} = n \sim$ un número racional

∴ No es una órbita cerrada



P21



$$\textcircled{*} p(0) = l_0$$

$$\sum \vec{F} = mg(-\hat{z}) + N_z \hat{z} + N_\varphi \hat{\varphi} + \vec{F}_v - K(p-l_0) \hat{p}$$

$\Rightarrow$ Vemos que la única ec. interesante es en $\hat{p}$

$$\rightarrow m(\ddot{p} - p\dot{\varphi}^2) = -K(p-l_0) - c\dot{p}$$

$\uparrow$
 ω_0^2

$$\rightarrow \ddot{p} + \frac{c}{m}\dot{p} + \left(\frac{K}{m} - \omega_0^2\right)p = \frac{Kl_0}{m} \quad \leadsto \quad r = p + \frac{Kl_0}{m\left(\frac{K}{m} - \omega_0^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} + \frac{c}{m}\dot{r} + \left(\frac{K}{m} - \omega_0^2\right)r = 0 \quad \dot{r} = \dot{p}, \ddot{r} = \ddot{p}$$

Inserte su método favorito de resolución de EDOs

El método que usaremos será suponer que (porque sabemos que debe ser más o menos así) la función $p(t)$ es de la forma:

$$r(t) = A \cdot e^{\lambda t}$$

Reemplazando en la EDO podemos encontrar el valor de λ .

$$\Rightarrow \ddot{r} + \frac{c}{m} \dot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r = 0$$

$$A \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{c}{m} \cdot A \lambda e^{\lambda t} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) A e^{\lambda t} = 0 \quad / : A e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{c}{m} \lambda + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) = 0 \quad \leadsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Eq. a usar} \\ \text{polinomio cuadr.} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}}{1}$$

⊛ Siempre es interesante ver cuando deja de ser un valor real, por lo que analizamos lo que hay dentro de la raíz:

$$\Rightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) \quad , \text{ dado que } \frac{k}{m} - \omega_0^2 > 0 \text{ por enunciado:}$$

Encontramos 3 casos según el valor de c :

$$i) \quad c > 2m\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) = 2(k - \omega_0^2 m)$$

$$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow r(t) = A e^{-\frac{c}{2m}t} e^{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}t} + B e^{-\frac{c}{2m}t} e^{-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}t}$$

Nos falta def. los valores de A y B , pero usando los C.I. (Condiciones Iniciales) los encontraremos:

⊛ recordar que las cond son para $p(t)$ y no para $r(t)$

$$1) \rho(t=0) = l_0$$

$$2) \dot{\rho}(t=0) = 0 \rightarrow \text{parte "quieta" en } \hat{p}$$

$$\Rightarrow (1) \rightarrow A + B + \frac{kl_0}{k - m\omega_0^2} = l_0$$

$$(2) \rightarrow A \left(\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right) + B \left(\frac{-c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{m\omega_0^2 l_0}{k - m\omega_0^2} \frac{\left(\frac{-c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right)}{2\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}}$$

$$B = \frac{-m\omega_0^2 l_0}{k - m\omega_0^2} \frac{\left(\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right)}{2\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}}$$

$$\rho(t) = \frac{m\omega_0^2 l_0}{k - m\omega_0^2} \left(\frac{\left(\frac{-c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right)}{2\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}} e^{\left(\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right)t} - \frac{\left(\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right)}{2\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}} e^{\left(\frac{-c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \right)t} \right) + \frac{kl_0}{k - m\omega_0^2}$$

por favor
No olvidar

$$ii) \underline{C = 2(k - \omega_0^2 m)}.$$

$\rightarrow$ nuestro sup de $r(t) = Ae^{\lambda t}$ ya no basta y necesitamos

$$r(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$$

Si imponemos los mismos C.I. vemos que el trabajo es análogo, salvo que en (1) solo tenemos A, porque B se mult. por cero $\rightarrow t=0$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow A + \frac{kl_0}{k - m\omega_0^2} = l_0 \quad \boxed{\lambda = -\frac{c}{2m}}$$

$$(2) \rightarrow -\frac{c}{2m} C_1 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p(t) = \frac{-m\omega_0^2 l_0}{k - m\omega_0^2} e^{-\frac{ct}{2m}} - \frac{c\omega_0^2 l_0}{2(k - m\omega_0^2)} t e^{-\frac{ct}{2m}} + \frac{kl_0}{k - m\omega_0^2}}$$

$$\text{iii) } \underline{C < 2(k - m\omega_0^2)} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} = i \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$\rightarrow e^{\pm i\sqrt{\gamma}t} \rightarrow \sin(\sqrt{\gamma}t) + \cos(\sqrt{\gamma}t)$$

$$\rightarrow p(t) = \frac{kl_0}{k - m\omega_0^2} + A e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\sqrt{\gamma}t) + B e^{-\frac{c}{2m}t} \cos(\sqrt{\gamma}t)$$

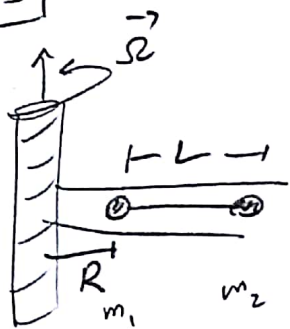
$$\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$$

$$\Rightarrow B + \frac{l_0 k}{k - m\omega_0^2} = l_0$$

$$\dot{p}(t) = 0 \Rightarrow A\sqrt{\gamma} + B\left(-\frac{c}{2m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p(t) = \frac{-c\omega_0^2 l_0}{2(k - m\omega_0^2)} e^{-\frac{ct}{2m}} \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t\right)}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} - \frac{m\omega_0^2 l_0}{k - m\omega_0^2} e^{-\frac{ct}{2m}} \cos\left(\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t\right) + \frac{kl_0}{k - m\omega_0^2}}$$

P31



$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \rho_1 \hat{\rho}, \quad \vec{r}_2 = \rho_2 \hat{\rho}$$

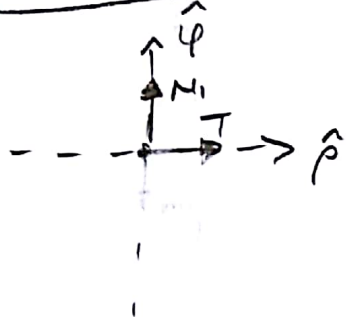
$$\otimes r_1(t=0) = R$$

Aun cuando tenemos 2 part. tenemos solo 1 $\hat{\rho}$ y 1 $\hat{\varphi}$

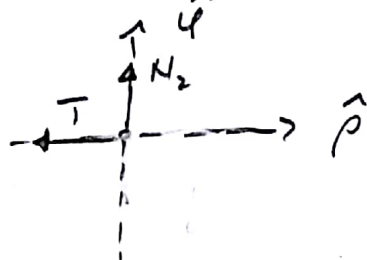
$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\rho}_1 \hat{\rho} + \rho_1 \Omega \hat{\varphi}, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\rho}_2 \hat{\rho} + \rho_2 \Omega \hat{\varphi}$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 = (\ddot{\rho}_1 - \rho_1 \Omega^2) \hat{\rho} + 2\dot{\rho}_1 \Omega \hat{\varphi}, \quad \ddot{\vec{r}}_2 = (\ddot{\rho}_2 - \rho_2 \Omega^2) \hat{\rho} + 2\dot{\rho}_2 \Omega \hat{\varphi}$$

DCL m_1



DCL m_2



La parte en $\hat{z}$ no nos interesa

$$\begin{aligned} \hat{\rho} | \quad T &= m_1 (\ddot{\rho}_1 - \rho_1 \Omega^2) \\ \hat{\varphi} | \quad N_1 &= 2m_1 \dot{\rho}_1 \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -T &= m_2 (\ddot{\rho}_2 - \rho_2 \Omega^2) \\ N_2 &= 2m_2 \dot{\rho}_2 \Omega \end{aligned}$$

$$b) \text{ Usando que } \rho_2 = \rho_1 + L \Rightarrow \dot{\rho}_1 = \dot{\rho}_2, \quad \ddot{\rho}_1 = \ddot{\rho}_2$$

$$\Rightarrow T = m_1 (\ddot{\rho}_1 - \rho_1 \Omega^2) = -m_2 (\ddot{\rho}_1 - \rho_1 \Omega^2 - L \Omega^2)$$

$$\ddot{\rho}_1 (m_1 + m_2) - \rho_1 \Omega^2 (m_1 + m_2) = m_2 L \Omega^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho}_1 - \rho_1 \Omega^2 = \frac{m_2 L \Omega^2}{(m_1 + m_2)}, \quad \rho_1 = x - \frac{m_2 L}{(m_1 + m_2)}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - x \Omega^2 = 0 \Leftrightarrow x(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} \quad \text{Osc. Almonico}$$

$$\rightarrow p_1(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} - \frac{m_2 L}{(m_1 + m_2)}$$

C.I. $\rightarrow p_1(0) = R \rightarrow A + B - \frac{L m_2}{(m_1 + m_2)} = R$
 $\dot{p}_1(0) = 0 \rightarrow A \Omega - B \Omega = 0$

$$\Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \left(R + \frac{L m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad \cosh(\Omega t) = \frac{e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}}{2}$$

$$\Rightarrow p_1(t) = \left(R + \frac{L m_2}{m_1 + m_2} \right) \cosh(\Omega t) - \frac{L m_2}{m_1 + m_2}$$

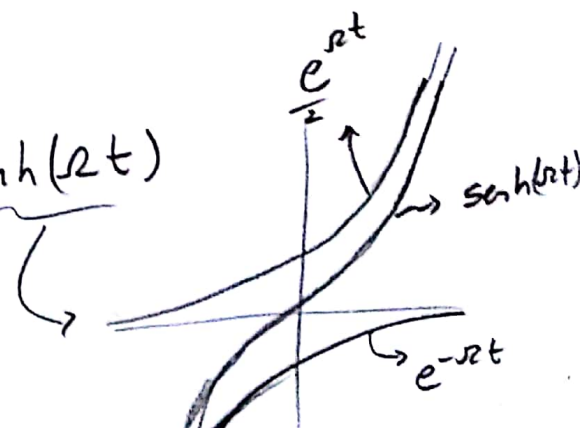
$$p_2(t) = \left(R + \frac{L m_2}{m_1 + m_2} \right) \cosh(\Omega t) + L \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Y 2 vims) que $\ddot{p}_1 - p_1 \Omega^2 = \frac{m_2 L \Omega^2}{(m_1 + m_2)}$

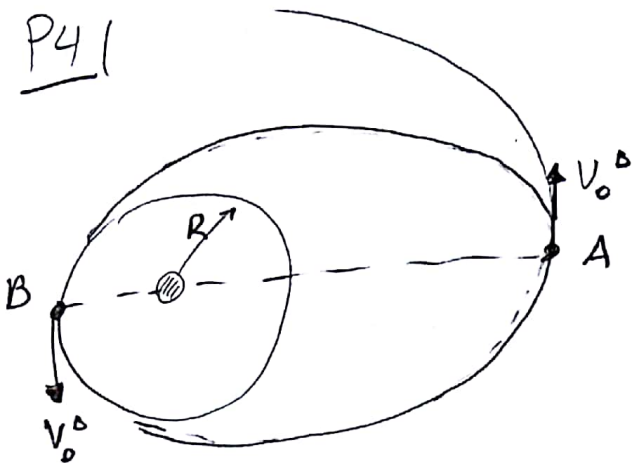
$$\Rightarrow T = m_1 (\ddot{p}_1 - p_1 \Omega^2) = \boxed{\frac{m_1 m_2 L \Omega^2}{(m_1 + m_2)} = T}$$

c) para saber como cambia las dist p_1 y p_2 en t calculamos $\dot{p}_1(t)$ y $\dot{p}_2(t)$

$$\Rightarrow \dot{p}_1(t) = \dot{p}_2(t) = \Omega \left(R + \frac{L m_2}{m_1 + m_2} \right) \sinh(\Omega t)$$



P41



$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

a) ¿Vel. circular?

$$\Rightarrow \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_c} = 0$$

$$\Sigma F_r = -\frac{GMm}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad r = \text{cte} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{GMm}{R_c^2} = -m R_c \dot{\varphi}^2 = -\frac{V_0^2}{R_c} \Rightarrow \text{orb. circular.}$$

$$R\dot{\varphi} = V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_c}}}$$

b) ε orb. elíptica [Primero hacer los cálculos de Binet]

Podemos deducir la expresión de la excentricidad usando

Binet. $\leadsto$ 1) $r(t) \rightarrow r(\varphi) \Rightarrow \dot{r} = \dot{\varphi} r' = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi}$ Reglas de la cadena

$$\Rightarrow \ddot{r} = \frac{l^2}{m^2 r^2} \left(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'^2}{r^3} \right)$$

$$2) \text{ def. } \frac{1}{w(\varphi)} \equiv \frac{1}{r(\varphi)} \leadsto r' = -\frac{w'}{w^2}, \quad r'' = -\frac{w''}{w^2} + \frac{2w'^2}{w^3}$$

Con lo anterior reemplazamos en :

$$o) \quad m \ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + F(r) /$$

$\uparrow -\nabla U(r)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l^2}{mr^3} = mr^2 \dot{\varphi}^2 \\ \text{por el círculo en} \\ a) \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow w'' = -w - \frac{m}{l^2 w^2} F\left(\frac{1}{w}\right)$$

Volviendo al caso gravitacional :

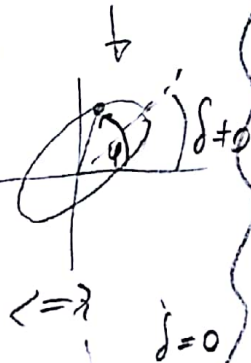
la gracia de Binet.
es que F_g se ve
constante

$$w'' + w = \frac{GMm^2}{l^2}$$

$$\hookrightarrow w(\varphi) = A \cos(\varphi + \delta) + \frac{GMm^2}{l^2}$$

depende de donde
ponemos el 0
 $\Rightarrow \delta = 0$

$$\Rightarrow \text{Volviendo a } \left\{ r(\varphi) = \frac{\frac{l^2}{GMm^2}}{1 + \frac{Al^2}{GMm^2} \cos(\varphi)} \right.$$



$$o) \quad \frac{Al^2}{GMm^2} = e : \text{excentricidad}$$

$$o) \quad \frac{l^2}{GMm^2} = R : \text{escala long conica}$$

2) dada la velocidad inicial

caso ellipse $\leadsto e^2 < 1$

$$\hookrightarrow r_{\min} = \frac{R}{1+e}, \quad r_{\max} = \frac{R}{1-e}$$

Aún no sabemos cuanto vale la const. A .

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r} \quad \text{usando los cambios de Binet.} \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{G M m}{r} = \frac{l^2}{2m} (\omega^2 + \omega'^2) - G M m \omega \end{aligned}$$

Reemplazamos $\omega(\varphi) = A \cos(\varphi) + \frac{G M m^2}{l^2}$

$$\Rightarrow E = \frac{l^2 A^2}{2m} - \frac{m}{2} \left(\frac{G M m}{l^2} \right)^2 \Rightarrow A = \frac{G M m^2}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2 E l^2}{(G M m)^2 m}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{l^2}{G M m^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2 E l^2}{(G M)^2 m^3}}$$

Conviene no olvidar:

- 1) ellipse $e < 1 \Rightarrow E < 0$
parabola $e = 1 \Rightarrow E = 0$
hiperbola $e > 1 \Rightarrow E > 0$
- $\rightarrow$ la circunferencia es un caso especial de la ellipse

$$2) \quad r(\varphi) = \frac{R}{1+e \cos(\varphi)}, \quad e = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max} + R_{\min}}$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3} \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{Parabola}$$

$$\Rightarrow \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3} = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow l=0 \quad \leftarrow \text{Sabemos } \frac{e}{n_0} \\ \rightarrow E=0 \quad \text{puede ser} \end{array}$$

Aprovechamos el caso de la parabola para en contrar $R_{\max}$ ^{pt A} en función de los datos

$$E = 0 = \frac{1}{2} m v_0^B{}^2 - \frac{GMm}{R_{\max}} \quad \text{parabola}$$

$$R_{\max} = \frac{2GM}{v_0^B{}^2}$$

Si ahora usamos conservación de Energía en la órbita eliptica y comparamos

$$E_B = E_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (v_0^B)^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m (v_A)^2 - \frac{GMm}{R_{\max}}$$

por conservación de mom. angular

$$\hookrightarrow R v_0^B = R_{\max} v_A^{\text{elip.}}$$

$$\rightarrow \text{Despejamos } v_0^B = \frac{2GM R_{\max}}{R(R_{\max} + R)}$$

$$\text{Usando } R_{\max} = \frac{2GM}{v_0^B{}^2}$$

$$\Rightarrow R_{\max} = \frac{2GM R^2}{4GM R_{\max}^2 (R_{\max} + R)^2}$$

por enunciado sabemos que $v_{\text{parabola}} = v_{\text{elip.}} = v_0^B$

Por esto usamos primero la orb. parabolica

$$\Rightarrow R_{max} = \frac{R \pm \sqrt{5}R}{2} \rightarrow \text{Solo nos sirve el } R_{max} > 0$$

$$\Rightarrow R_{max} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R$$

$$a) \frac{R_{max}}{R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \circ \quad e = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$

c) Como ya se el valor de R_{max} reemplazamos en :

$$a) V_0^{B2} = \frac{2GM}{R_{max}} \Rightarrow \sqrt{\frac{4GM}{(1+\sqrt{5})R}} = V_0^B$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{(1+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}} V_0 = V_0^B$$

vel. circular

$$a) R V_0^B = R_{max} V_A^{clip.}$$

$$\Rightarrow V_A^{clip} = \frac{2R}{(1+\sqrt{5})R} \sqrt{\frac{4GM}{(1+\sqrt{5})R}}$$

$$\boxed{V_A^{clip} = \frac{4}{(1+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{V_0}$