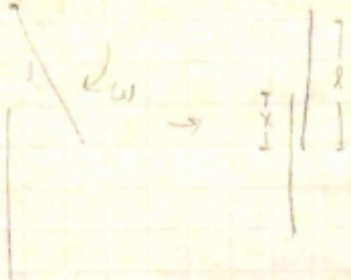
P3. Sobre una superficie horizontal sin roce , una varilla de largo l y masa m rota con frecuencia angular ω alrededor de un pivote colocado en uno de sus extremos. La varilla choca con otra varilla idéntica , tal como se indica en la figura, de manera que al momento del impacto se sobreponen en una longitud x. Immediatamente antes del choque el pivote se retira. Encuentre el valor de x de manera que después del choque, el sistema de las dos barras tenga energía translacional pero no rotacional.

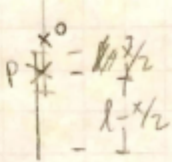
NOTA. Justifique cada uno de sus cálculos. Deje claramente establecido el punto con respecto al cual calcula momentum angular.

P3



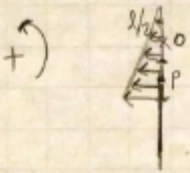
$I_{cm} = \frac{1}{12} m l^2$

Centro de masa final (P)



Por conservación de momentum angular queremos que $\vec{l}_P = 0$

→ Justo antes y después del choque se tiene que



- O avanza hacia la izquierda (antihorario) respecto a P
- La varilla gira en sentido horario

$\rightarrow \vec{l}_{P}{}_{\substack{t<0 \\ y\ t=0^+}} = m r_{op} V_0 \hat{k} - I_{cm} \omega \hat{k}$ ← una varilla $\Big/ \; r_{op} = \frac{l}{2} - \frac{x}{2}$, $V_0 = \omega \frac{l}{2}$

$\rightarrow \cancel{m} \frac{l-x}{2} \cancel{\omega} \frac{l}{2} - \cancel{\omega} \frac{1}{12} \cancel{m} l^2 = 0$ / Despejando

$3(l-x)l = l^2$

$3(l \quad) l$

Universidad de Chile

6 de mayo de 1998 Tiempo: 3 horas

DEBE ESCOGER SOLO TRES DE LAS CUATRO PREGUNTAS

PROBLEMA 1

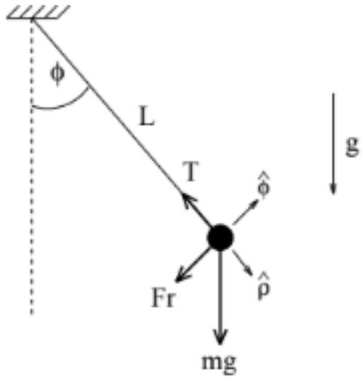
Un p'endulo de masa m y longitud L se mueve en el aire bajo la acci'on de la gravedad. El aire ejerce una fuerza de roce viscoso sobre la masa de la forma $\vec{F}_R = -\gamma\vec{v}$. El movimiento del p'endulo esta comprendido en un plano vertical.

(a) Encuentre la ecuaci'on de movimiento para el 'angulo ϕ que el p'endulo forma con la vertical.

(b) En el caso de peque nos desplazamientos respecto a la posici'on de equilibrio ('angulo ϕ peque no), encuentre el valor m'inimo que debe tener la masa m para que el p'endulo oscile amortiguadamente.

(c) En caso que la masa sea mayor al valor cr'itico encontrado en la parte (b), encuentre el per'iodo de las peque nas oscilaciones y comp'arelo con el de un p'endulo ideal sin roce.

PROBLEMA 1 (por R.S.)



(a) Para describir el movimiento se escoge un sistema de coordenadas polares con centro en el punto de apoyo del p'endulo. Usando el hecho que $\rho = L$, constante, la posici'on, velocidad y aceleraci'on de la part'icula son

$$\vec{r} = L\hat{\rho} \tag{1}$$
$$\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi} \tag{2}$$
$$\vec{a} = -L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi} \tag{3}$$

Las fuerzas que act'uan sobre la masa son la tensi'on $\vec{T}$, el peso $m\vec{g}$ y la fuerza de roce viscoso $\vec{F}_r$, que se escriben en este sistema de coordenadas como

$$\vec{T} = -T\hat{\rho} \tag{4}$$
$$m\vec{g} = mg\left(\cos(\phi)\hat{\rho} - \sin(\phi)\hat{\phi}\right) \tag{5}$$
$$\vec{F}_r = -\gamma\vec{v} \tag{6}$$
$$= -\gamma L\dot{\phi}\hat{\phi} \tag{7}$$

Al imponer la segunda Ley de Newton para la masa se obtiene

$$m\left(-L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}\right) = -T\hat{\rho} + mg\left(\cos(\phi)\hat{\rho} - \sin(\phi)\hat{\phi}\right) - \gamma L\dot{\phi}\hat{\phi} \tag{8}$$

La componente seg'un $\hat{\rho}$ de la ecuaci'on anterior tiene dos incognitas (ϕ y T), mientras que la seg'un $\hat{\phi}$ tiene solo una. Luego, la ecuaci'on de movimento para ϕ se obtiene directamente de la 'ultima proyecci'on

$$\boxed{mL\ddot{\phi} = -mg\sin(\phi) - \gamma L\dot{\phi}}$$

(b) En el caso de 'angulos peque nos, la ecuaci'on de movimiento puede ser aproximada usando que $\sin(\phi) \approx \phi$. Luego,

$$mL\ddot{\phi} = -mg\phi - \gamma L\dot{\phi} \tag{9}$$

que corresponde a la ecuaci'on de un oscilador arm'onico amortiguado.

Las soluciones de esta ecuaci'on, se encuentran planteando soluciones del tipo $\phi = e^{st}$. Al reemplazar esta soluci'on en la ecuaci'on, se obtiene que s satisface

$$mLs^2 = -mg - \gamma Ls \tag{10}$$

cuyas soluciones son

$$s = \frac{-\gamma L \pm \sqrt{\gamma^2 L^2 - 4m^2 Lg}}{2mL} \tag{11}$$

Para que las soluciones de ϕ sean *oscilantes*, es necesario que s tome valores complejos pues as'i la exponencial se transforma en senos y cosenos. Luego, se debe cumplir que el argumento de la raiz sea negativo

$$\gamma^2 L^2 - 4m^2 Lg < 0 \tag{12}$$

Entonces la masa debe cumplir que

$$\boxed{m > \sqrt{\frac{\gamma^2 L}{4g}}}$$

(c) Si se cumple la desigualdad anterior, los valores de s son

$$s = -c \pm i\omega_1 \tag{13}$$

con $c = \gamma/2m$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$ e $i = \sqrt{-1}$.
La soluci'on de ϕ consiste en una combinaci'on lineal de las dos soluciones encontradas, que se puede escribir finalmente como

$$\phi(t) = Ae^{-ct} \sin(\omega_1 t + \delta) \tag{14}$$

de donde se deduce que el per'iodo de las oscilaciones amortiguadas es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1} \tag{15}$$

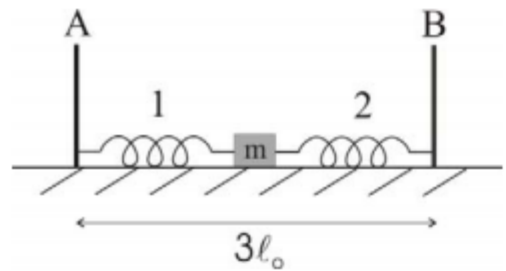
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}} \tag{16}$$

$$\boxed{\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{1 - \frac{L\gamma^2}{4m^2 g}}^{\,-1}}$$

El per'iodo de un p'endulo ideal es $\tau = 2\pi\sqrt{L/g}$, luego el per'iodo obtenido es mayor que el ideal.

Control 2 13/10/2010 FI2001 Mecánica, Semestre Primavera 2010
Tiempo: 3 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Un bloque puntual de masa *m* se encuentra ligado a dos paredes A y B mediante dos resortes como se muestra en la figura. Ambos resortes tienen constante elástica *k*, pero el resorte 1 tiene largo natural $\ell_\circ$, y el resorte 2 tiene largo natural $2\ell_\circ$. Considere que el bloque es liberado desde el reposo estando justo en el punto medio entre A y B.



a) Si no existe roce cinético con la superficie, determine los puntos extremos que alcanza el bloque en su movimiento.

b) Si existe un roce cinético μ entre bloque y superficie, determine los siguientes 2 puntos en que el bloque se detiene instantáneamente (suponga que el roce estático es insuficiente para mantener a la partícula en reposo).

2. Una partícula de masa *m* está sometida a una única fuerza central, cuya energía potencial *V(r)* tiene la forma: $V(r) = -\frac{mK}{r^\lambda}$, donde λ y *K* son constantes positivas conocidas.

a) Si la partícula tiene momento angular L_o, determine su potencial efectivo, $V_*(r)$. Encuentre el radio de equilibrio asociado a este potencial efectivo. Determine la velocidad angular de la órbita circular correspondiente al radio de equilibrio.

b) ¿Para qué rango de valores de λ el radio de equilibrio encontrado en a) es estable? Para este caso determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones para perturbaciones radiales de la órbita. ¿Bajo qué condición la órbita perturbada es cerrada? (*Sugerencia*: compare el periodo de las pequeñas oscilaciones con el periodo de la órbita circular).

El problema se trata de una partícula sometida a la influencia de una fuerza central. Establecemos un sistema de referencia con origen en el centro de fuerzas. El plano xy contiene la dinámica de la partícula (Sabemos que la dinámica de la partícula es plana, debido a la conservación del momento angular).

Trabajamos con coordenadas polares planas:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}, \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi} \tag{1}$$

En estas coordenadas, el potencial y la fuerza tienen la forma:

$$U = -\frac{mk}{r^{\lambda}}, \qquad \vec{F} = -\nabla U = -\frac{\lambda mk}{r^{\lambda+1}}\hat{r} \tag{2}$$

Donde $\lambda > 0$. Como la fuerza es central, el momento angular se conserva:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2\dot{\phi} = J_0\hat{z} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{J_0}{mr^2} \tag{3}$$

La energía mecánica también se conserva:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{mk}{r^{\lambda}} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{{J_0}^2}{2mr^2} - \frac{mk}{r^{\lambda}} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r, J_0) \tag{4}$$

U_{eff} es el *potencial efectivo*:

$$U_{eff} = \frac{{J_0}^2}{2mr^2} - \frac{mk}{r^\lambda}, \qquad \frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{{J_0}^2}{mr^3} + \frac{\lambda mk}{r^{\lambda+1}}, \qquad \frac{dU_{eff}^2}{dr^2} = \frac{{J_0}^2}{mr^4} - \frac{\lambda(\lambda+1)mk}{r^{\lambda+2}} \tag{5}$$

2

El radio de equilibrio r_{eq} está dado por:

$$\frac{dU_{eff}}{dr}(r_{eq}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_{eq} = \left(\frac{\lambda m^2 k}{{J_0}^2}\right)^{\frac{1}{\lambda-2}} \tag{6}$$

Dado un movimiento circunferencial en torno al centro de fuerzas, la velocidad angular está dada por:

$$\omega_{mcu} = \frac{J_0}{m{r_{eq}}^2} = (J_0 m)^{1+\frac{4}{\lambda-2}}(k\lambda)^{\frac{2}{\lambda-2}} \tag{7}$$

Esta dinámica es estable sólo si la segunda derivada del potencial efectivo es positiva:

$$\frac{dU_{eff}^2}{dr^2}(r_{eq}) = {J_0}^{2+\frac{8}{\lambda-2}} m^{-(1+\frac{8}{\lambda-2})}(k\lambda)^{-\frac{4}{\lambda-2}}(2-\lambda) \tag{8}$$

Esta dinámica es estable sólo si la segunda derivada del potencial efectivo es positiva:

$$\frac{dU^2_{eff}}{dr^2}(r_{eq}) = J_0^{2+\frac{8}{\lambda-2}} m^{-(1+\frac{8}{\lambda-2})}(k\lambda)^{-\frac{4}{\lambda-2}}(2-\lambda) \tag{8}$$

Es estable si $\lambda < 2$ e inestable si $\lambda > 2$. Si $\lambda = 2$, es necesario hacer un *análisis débilmente no lineal* (seguir expandiendo en Taylor) para determinar la estabilidad.

La frecuencia de pequeñas oscilaciones vale:

$$\omega_{po} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{dU^2_{eff}}{dr^2}(r_{eq})} = (J_0 m)^{1+\frac{4}{\lambda-2}}(k\lambda)^{-\frac{2}{\lambda-2}}(2-\lambda)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2-\lambda}\,\omega_{mcu} \tag{9}$$

Para que la trayectoria sea cerrada, la razón entre el tiempo empleado en concretar una oscilación y el tiempo empleado en dar una vuelta, debe ser racional (En particular, si son iguales, la trayectoria se cierra en una sola vuelta); es decir:

$$\frac{\omega_{po}}{\omega_{mcu}} \in \mathbb{Q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{2-\lambda} \in \mathbb{Q} \tag{10}$$

Nótese que el único valor natural que puede satisfacer esto es $\lambda = 1$.