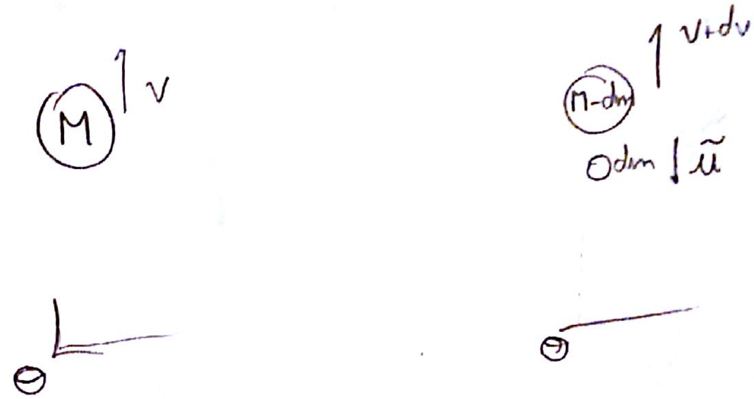
a) Esquemáticamente tenemos la sig. situación.

En t En t+dt



Con ũ y v las velocidades desde el sist. de referencia O.

Veamos el momentum antes y después

$$p_i = M v \qquad (1)$$

$$p_f = (M-dm)(v+dv) + dm\,\tilde{u}$$

$$= Mv - dm\,v + M\,dv - \underbrace{\cancel{dm\,dv}}_{\substack{0 \\ \text{Muy pequeño}}} - dm\,u \qquad (2)$$

Usando (1) y (2), el cambio de momentum es:

$$p_f - p_i = \cancel{Mv} - dm\,v + M\,dv - dm\,\tilde{u} - \ldots$$

$$= M\,dv + (\tilde{u}+v)\,dm \qquad (3)$$

Luego, la derivada del momentum c/r al tiempo es (usando (3)):

$$\frac{dp}{dt} = M\frac{dv}{dt} - (\tilde{u}+v)\frac{dm}{dt} \qquad (4)$$

Notamos que $\tilde{u}+v$ corresponde a la rapidez del gas c/r al cohete.

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}+v = u \qquad (5)$$

(5) en (4):

$$\frac{dp}{dt} = M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} \qquad (6)$$

Usando (6) y ley de newton:

$$\frac{dp}{dt} = F = -Mg \Rightarrow M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} = -Mg \qquad (7)$$

..., como m es la masa del gas, se tiene lo siguiente. (Por conservación de masa):

$$\underbrace{M_i}_{cte} = M(t) + m \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{dM}{dt} + \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt} \qquad (8)$$

Usando (8) en (7):

$$M\frac{dv}{dt} + \mu\frac{dM}{dt} = -Mg$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{M\frac{dv}{dt} = -\mu\frac{dM}{dt} - Mg}_{\text{Ec. de movimiento.}} \qquad (9)$$

De (9) notamos que la condición para que despegue es:

$$-\mu\frac{dM}{dt} - Mg > 0 \Rightarrow -\mu\frac{dM}{dt} > Mg$$

Luego, el valor mínimo de $\left|\mu\frac{dM}{dt}\right|$ para que despegue en $t=t_0$ es $\left|\mu\frac{dM}{dt}\right|_{min} = M_i g$.

b) Reescribimos (9) e integramos:

$$\frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt} \cdot \frac{1}{M} - g \quad / \int_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow \quad V - V_0 = -u \ln\left(\frac{M}{M_i}\right) - g(t - t_0) \qquad (10)$$

Usando $t_0 = 0$ y $V_0 = 0$.

$$(10) \Rightarrow \quad V(t) = -u \ln\left(\frac{M(t)}{M_i}\right) - gt \qquad (11)$$

c) Suponga $\left|\frac{dM}{dt}\right| = \alpha$

$$\Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = -\alpha$$ (pues el cohete pierde masa)

Integrando y suponiendo que M_c es la masa inicial de combustible

$$\Rightarrow \quad M(t) - M_i = -\alpha t$$

Imponiendo que $M(t^*) = M_i - M_c$

$$\Rightarrow \quad -M_c = -\alpha t^* \Rightarrow t^* = \frac{M_c}{\alpha} \qquad (12)$$

Donde t^* corresponde al tiempo en que se quema todo el combustible.

óptimo tq la velocidad sea máxima en t^*, i.e. $\frac{d\dot{v}}{dt} = 0$ en t^*

Usando (9): (en t^*)

$$\Rightarrow (M_i - M_c) \cdot 0 = +\mu(+\alpha^*) - (M_i + M_c)g$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^* = \frac{(M_i - M_c)g}{\mu} \qquad (13)$$

Donde α^* es el valor óptimo pedido

Usando (13) en (12): (Sólo curiosidad)

$$t^* = \frac{M_c \ \mu}{(M_i - M_c)g}$$

d) De la parte c):

$$M(t) = -\alpha t + M_i \qquad (14)$$

(14) en (11):

$$V(t) = \frac{dz}{dt} = -\mu \ln\left(\frac{M_i - \alpha t}{M_i}\right) - gt \qquad (15)$$

$$= -\mu \ln\left(1 - \frac{\alpha}{M_i}t\right) - gt$$

Integramos (15):

$$\int_{t=0}^{t} \frac{dz}{dt} = -\frac{gt^2}{2} + \frac{uM_i}{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{M_i}t\right)\left[\ln\left(1-\frac{\alpha}{M_i}t\right)-1\right]\Bigg|_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow \quad z - \cancel{z_0}^{0} = -\frac{gt^2}{2} + \frac{uM_i}{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{M_i}t\right)\left[\ln\left(1-\frac{\alpha}{M_i}t\right)-1\right] + \frac{uM_i}{\alpha}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{uM_i}{\alpha} - \frac{gt^2}{2} + \frac{uM_i}{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{M_i}t\right)\left[\ln\left(1-\frac{\alpha}{M_i}t\right)-1\right] \quad (16)$$

Evaluamos (16) en t^*:

$$z(t^*) = z_1$$

Después de que se acaba el combustible, el movimiento sólo es debido a la gravedad.

$$h(t) = z_1 + \underbrace{V(t^*)}_{V_1}t - \frac{g}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \dot{h}(t) = V_1 - gt \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{V_1}{g}$$

$$\Rightarrow h_{máx} = z_1 + V_1\frac{V_1}{g} - \frac{\cancel{g}}{2}\left(\frac{V_1}{g}\right)^2 = z_1 + \frac{V_1^2}{g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

$$= z_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

Scanned by CamScanner

Pauta Control 1
17 de abril del 2017

Problema 1

Una partícula se mueve en un potencial

$$V(r) = -\frac{C}{3r^3} \tag{1}$$

a) Dado el valor del momentum angular L, encontrar el valor máximo del potencial efectivo.

b) Grafique el potencial efectivo.

c) Considere que la partícula viene desde el infinito con rapidez v_0 y momentum angular L. En función de C, m y v_0, ¿cuál es el máximo valor de L para que la partícula sea capturada por el potencial?

Desarrollo del problema

a) Sabemos que el potencial efectivo tiene la siguiente forma:

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3} \tag{2}$$

Y debemos encontrar el radio r_0 en que alcanza su máximo V_0, derivando e igualando a cero:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{C}{r^4} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{mC}{L^2} \tag{3}$$

Luego este valor se reemplaza en la expresión para el potencial efectivo, encontrando así su máximo:

$$V_0 = V_{ef}(r = r_0) = \frac{L^2}{2m\left(\frac{mC}{L^2}\right)^2} - \frac{C}{3\left(\frac{mC}{L^2}\right)^3} = \frac{L^6}{2m^3C^2} - \frac{L^6}{3m^3C^2} = \frac{L^6}{6m^3C^2} \tag{4}$$

b) Al graficar se deben considerar los siguientes hitos de la función:

- Ceros de la función. Si imponemos que $V_{ef} = 0$ encontramos que existe un único cero:

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3} = 0 \rightarrow r_{V=0} = \frac{2}{3}\frac{mC}{L^2} = \frac{2}{3}r_0 \tag{5}$$

- $r \rightarrow \infty$. Podemos ver que para r suficientemente grande el término negativo será más pequeño que el término positivo del potencial efectivo, dado que $1/r^3$ tiende más rápido a cero que $1/r^2$, por lo que el potencial efectivo tenderá a cero pero por sobre el gráfico (o sea, siendo positivo).
- $r \rightarrow 0$. Aquí, al contrario del caso anterior, el término $1/r^3$ termina siendo predominante por lo que el potencial tenderá a infinito, pero negativo.
- Punto de inflexión. (No era necesario). Aquí debemos derivar nuevamente el potencial efectivo:

$$\frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{4C}{r^5} = 0 \rightarrow r_{inf} = \frac{4}{3}\frac{mC}{L^2} = \frac{4}{3}r_0 \tag{6}$$

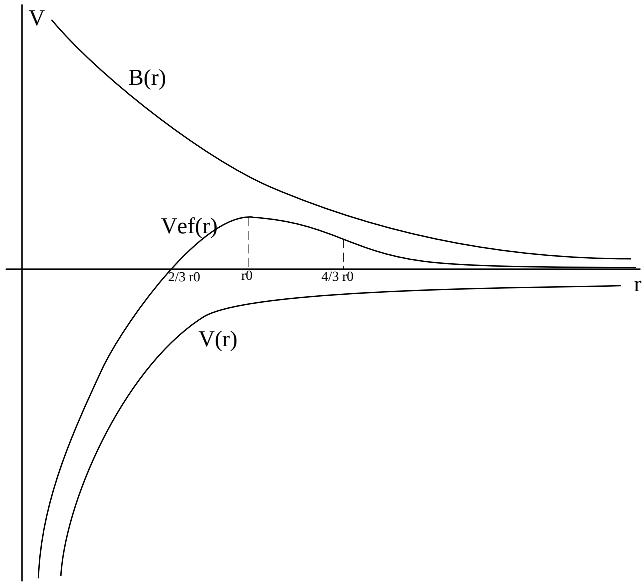


Figura 1: Gráfico de la barrera centrífuga $B(r)$, el potencial $V(r)$ y el potencial efectivo $V_{ef}(r)$. Se indica el cero, el máximo y el punto de inflexión del potencial efectivo, igualmente se podría colocar el valor del máximo.

En base a esto, podemos decir que el gráfico deberá ser así:

c) Aquí se debe considerar el caso crítico de que $E = V_0$ donde E es la energía mecánica total de la partícula. En primer lugar la energía inicial vale:

$$E_i = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{7}$$

Esto último dado que $r \to \infty$ así que el segundo y tercer término son nulos.

La energía justo cuando la partícula se encuentre en $r = r_0$ y $E = V_0$ (entonces $\dot{r} = 0$), será:

$$E_f = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3} = V_0 = \frac{L^6}{6m^3C^2} \tag{8}$$

Igualando estas energía llegamos a que:

$$E_i = E_f \to \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{L^6}{6m^3C^2} \to L_c = \left(3v_0^2m^4C^2\right)^{1/6} \tag{9}$$

Problema 2

Un planeta gira en una órbita circular de radio R en torno al sol.

a) Obtenga la relación que existe entre el periodo T y el radio R de la órbita.

b) Suponga que repentinamente el planeta se detiene en su órbita y comienza a caer radialmente hacia el sol. Si el radio de la órbita del planeta en torno al sol es R y el radio del sol r_s. ¿Cuánto demora el planeta en caer sobre el sol? Considere que el camino radial es parte de una elipse muy delgada.

Desarrollo del problema

a) En una órbita circular uniforme tenemos que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y $r = R$, además $\ddot{\phi} = 0$ y $\dot{\phi} = \omega$, donde ω es constante. En base a un balance de fuerzas llegamos a:

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \tag{10}$$

$$-mR\omega^2 = -\frac{GMm}{R^2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \tag{11}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} \tag{12}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} \rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{13}$$

Esta última expresión corresponde a lo que plantea la tercera ley de Kepler de forma idéntica, solo que esta última se aplica a órbitas no circulares igualmente, donde en vez de usar R se utiliza a que es el semi-eje mayor de la órbita elíptica que recorre un planeta u otro cuerpo alrededor de un cuerpo central de masa M.

b) En este caso el planeta se acercará radialmente hasta la superficie del sol (se indica que es una órbita elíptica muy delgada dado que en condiciones menos ideales sería bien difícil que el planeta se detenga en seco tal que v_ϕ sea cero, entonces si toma un valor bajo esta velocidad el resultado será una órbita elíptica muy delga que se intersecta con la superficie del sol). Dado que el movimiento es radial tenemos que $\ddot{\phi} = \dot{\phi} = 0$ y que r es variable en el tiempo. Planteando la ecuación de movimiento nos queda:

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \tag{14}$$

Se asumen condiciones iniciales de $r(0) = R$ y $\dot{r}(0) = 0$, y finales de $r = r_s$.

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \tag{15}$$

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 - \dot{r}^2(0)) = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r(0)}\right) \tag{17}$$

$$\dot{r}^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \tag{18}$$

$$\int_R^{r_s} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} = -\sqrt{2GM}\int dt = \sqrt{2GM}t_s \tag{19}$$

Donde t_s es el tiempo que demora en caer. Resta calcular entonces la integral al lado izquierdo en la ecuación anterior. Se resolverá la integral de modo indefinido (sin constantes) pero luego se volverá a la variable original para así evaluar en los límites de integración.

$$r = Ru \to dr = Rdu \to \int \frac{Rdu}{\sqrt{\frac{1}{Ru} - \frac{1}{R}}} \tag{20}$$

$$R^{3/2} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u} - 1}} du \to \frac{1}{u} = \csc^2 \theta \to u = \sin^2 \theta,\ du = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \tag{21}$$

$$2R^{3/2} \int \frac{1}{\cot \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2R^{3/2} \int \sin^2 \theta d\theta = 2R^{3/2} \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \tag{22}$$

$$= R^{3/2}(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) = R^{3/2} \left(\arcsin(\sqrt{\frac{r}{R}}) - \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(\sqrt{\frac{r}{R}})) \right) \tag{23}$$

$$t_s = -\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \left(\arcsin(\sqrt{\frac{r}{R}}) - \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(\sqrt{\frac{r}{R}})) \right) \Big|_{r=R}^{r=r_s} \tag{24}$$

$$t_s = -\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \left[\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{r_s}{R}}\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{R}{R}}\right) \right) - \frac{1}{2} \left(\sin\left(2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{r_s}{R}}\right)\right) - \sin\left(2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{R}{R}}\right)\right) \right) \right] \tag{25}$$

$$t_s = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{r_s}{R}}\right) \right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{r_s}{R}}\right)\right) \right] \tag{26}$$

Problema 3

En $t = 0$ un balde de masa despreciable contiene un masa M de arena. EL balde está unido a una pared vecina mediante un cable horizontal que permanentemente aplica sobre el balde una tensión constante T_0 (que es independiente del largo de la cuerda). La superficie horizontal sobre la cual descansa el balde no tiene roce y la distancia inicial entre la pared y el balde es L. Más tarde, la distancia entre la pared y el balde la denotamos como x y m es la cantidad de arena en el balde. Cuando el balde se suelta y viaja hacia la pared se observa que el balde pierde arena a una tasa constante $dm/dx = M/L$. En otras palabras, la tasa de pérdida es constante respecto a la posición, no con respecto al tiempo. Se observa que el balde termina vacío justo cuando llega a la pared. Note que dx es negativo, así que dm también lo es.

a) Calcule el valor de la energía cinética de la arena dentro del balde, en función de x. ¿Cuál es el valor máximo que alcanza?

b) Calcule la magnitud del momentum lineal en función de x e indique cuál es el valor máximo que alcanza.

Desarrollo del problema

a) En primer lugar se definirá el sistema tal que $x(0) = 0$ y $x(t_f) = L$, y así al integrar dm/dx nos queda:

$$dm = \frac{M}{L} dx \to m(x) = \frac{M}{L} x + C \to m(x) = M \left(1 - \frac{x}{L} \right) \tag{27}$$

Luego, se plantea la ecuación de movimiento tal que $\vec{p} = m\vec{v} = m(x)\dot{x}\hat{i}$, notando que si se deriva la expresión para el momentum p se llega a expresiones más complicadas que no se podrían resolver, la única opción sería volver a la misma expresión de la cual partimos. El problema también yace en que al plantear la ecuación aparecen las variables x, $\dot{x}$ y t y no se puede encontrar directamente una expresión para $\dot{x}$ en función de x, no pudiendo encontrar entonces una fórmula para K en función solamente de x directamente. Trabajaremos entonces directamente con la variable temporal y podemos llegar a $x(t)$ y con eso empezar a responder, como sigue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \frac{d(m\dot{x})}{dt} = T_0 \rightarrow (m\dot{x})_t - (m\dot{x})_{t=0} = T_0 t \tag{28}$$

$$m\dot{x} = T_0 t \rightarrow M\left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{dx}{dt} = T_0 t \tag{29}$$

$$x - \frac{x^2}{2L} = \frac{T_0 t^2}{2M} \rightarrow x^2 - 2Lx + \left(\frac{T_0 L}{M}\right)t^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2Lx + \alpha t^2 = 0 \tag{30}$$

Donde se define el parámetro $\alpha = \frac{T_0 L}{M}$. Se tiene una ecuación cuadrática para x, o sea:

$$x = L \pm \sqrt{L^2 - \alpha t^2} \tag{31}$$

Donde se escoge el signo negativo de modo que se cumpla $x(0) = 0$. Con esto podemos calcular $\dot{x}$ y luego $m(x)$.

$$x = L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2} \tag{32}$$

$$\dot{x} = \frac{\alpha t}{\sqrt{L^2 - \alpha t^2}} \tag{33}$$

$$m(t) = \frac{M}{L}\sqrt{L^2 - \alpha t^2} \tag{34}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{\frac{1}{2}\frac{M}{L}\alpha^2 t^2}{\sqrt{L^2 - \alpha t^2}} \tag{35}$$

Vemos que no es posible encontrar una expresión simple para K en función de x, salvo despejando la variable temporal en la expresión para esta. Conviene seguir trabajando con la variable t y maximizar la energía cinética K en base a esta como sigue:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{M\alpha^2}{2L}\left[\frac{2t\sqrt{L^2 - \alpha t^2} + t^2 \frac{2\alpha t}{2\sqrt{L^2 - \alpha t^2}}}{L^2 - \alpha t^2}\right] = \frac{M\alpha^2}{2L(L^2 - \alpha t^2)^{3/2}}(2t(L^2 - \alpha t^2) + \alpha t^3) = 0 \tag{36}$$

$$2t(L^2 - \alpha t^2) + \alpha t^3 = 0 \rightarrow 2L^2 - 2\alpha t^2 + \alpha t^2 = 0 \tag{37}$$

$$\rightarrow 2L^2 = \alpha t^2 \rightarrow t_m = L\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \tag{38}$$

Antes de estudiar si este instante t_m en que K alcanza su máximo se debe calcular el instante en que el balde llega al muro, o sea cuando $x = L$.

$$x = L \rightarrow L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2} = L \rightarrow \sqrt{L^2 - \alpha t^2} = 0 \tag{39}$$

$$\rightarrow L^2 - \alpha t^2 = 0 \rightarrow t_{x=L} = L\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \tag{40}$$

Como $t_{x=L} < t_m$, el balde llega al muro antes de que la energía cinética alcance su máximo global, aun cuando este máximo global no tiene sentido tampoco dado que t debe ser menor a

$t_{x=L}$ de lo contrario el denominador de K se vuelve nulo. Ahora calcularemos el máximo de K notando que la función será creciente siempre y cuanado $t < t_{x=L}$, entonces el máximo buscado se encuentra evaluando en este instante, pero el denominador se indeterminará por lo que la energía cinética sería idealmente $K \to \infty$. Esto tiene sentido al considerar que la masa sería nula en el último instante, pero aun se le seguiría aplicando una fuerza constante, por lo que la aceleración será cada vez más grande a medida que $x \to L$.

b) En este caso se debe aplicar el hecho de que $p = m\dot{x}$, o sea:

$$\vec{p} = m\dot{x}\hat{i} \to p(t) = m(t)\dot{x}(t) = \frac{M}{L}\alpha t = T_0 t \tag{41}$$

$$x(t) = L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2} \to t = \sqrt{\frac{L^2 - (L-x)^2}{\alpha}} \tag{42}$$

$$p(x) = T_0\sqrt{\frac{L^2 - (L-x)^2}{\alpha}} \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

Se podía hacer el mismo análisis con la energía cinética K, pero en este caso no quedaría tan engorroso. Dado que ahora se nos pide encontrar el máximo esto se puede hacer en la variable temporal, y nos queda que:

$$\frac{dp}{dt} = T_0 \tag{45}$$

O sea el aumento de momentum lineal es constante en el tiempo con lo cual su valor máximo será simplemente al evaluar en $t = t_{x=L}$, o sea:

$$p_{max} = T_0 t_{x=L} = \frac{T_0 L}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{MLT_0} \tag{46}$$

Aquí conviene destacar el hecho de que K_{max} sea infinito viene de que depende de $\dot{x}^2$, en cambio el momentum lineal depende de $\dot{x}$ con lo que el aumento de la velocidad se compensa en orden de magnitud con la disminución de masa, quedando así un valor finito.