

Aux #6: Prop. CIP.1 (CI 2011-1)

a) Solve la partícula aduan el peso, la tensión y la normal:

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= \vec{F}_N = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} \\ &= (-mg \cos \theta_0 + N) \hat{r} + (mg \sin \theta_0 - T) \hat{\theta}\end{aligned}$$

Para la aceleración, se usa que $\begin{cases} r=R=\text{cte} \\ \theta=\theta_0=\text{cte} \end{cases}$
 $\Rightarrow \vec{a} = -R \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}^2 \hat{r} - R \sin \theta_0 \cos \theta_0 \dot{\phi}^2 \hat{\theta} + R \sin \theta_0 \ddot{\phi} \hat{\phi}$

Usando 2ª ley de Newton ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$) se tiene:

$$\hat{r}) -mR \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}^2 = -mg \cos \theta_0 + N$$

$$\hat{\theta}) -mR \sin \theta_0 \cos \theta_0 \dot{\phi}^2 = mg \sin \theta_0 - T$$

$$\hat{\phi}) mR \sin \theta_0 \ddot{\phi} = mR \sin \theta_0 \frac{d(\dot{\phi})}{dt} = 0 \quad [\dot{\phi} = \text{cte}]$$

La velocidad máxima se logra con $N=0$. Con esto:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g \cos \theta_0}{R \sin^2 \theta_0}, \text{ con lo que la rapidez máxima es}$$

$$v_{\text{máx}} = \|\vec{v}\| = \|R \sin \theta_0 \sqrt{\frac{g \cos \theta_0}{R \sin^2 \theta_0}} \dot{\phi}\| = \sqrt{gR \cos \theta_0}$$

b) Dado que el extremo de la cuerda se tira con rapidez v_a , se tiene que:

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte} = -\frac{v_a}{R} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 - \frac{v_a t}{R}$$

Las ecuaciones de movimiento son (θ conocido (t))

$$\hat{r}) \quad m \left(-\frac{v^2}{R} - R \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) = -mg \cos \theta + N$$

$$\hat{\theta}) \quad -mR \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = mg \sin \theta - T$$

$$\hat{\phi}) \quad \frac{R}{\sin \theta} \frac{d(\dot{\phi} \sin^2 \theta)}{dt} = 0 \rightarrow \text{de aquí sale:}$$

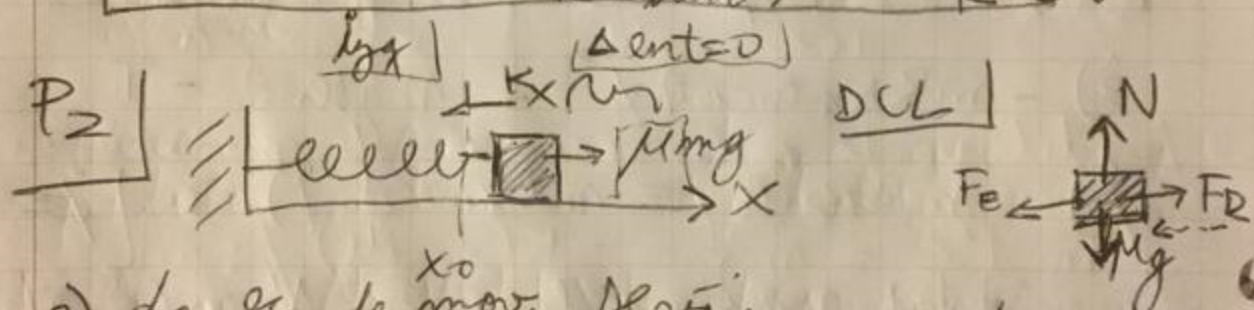
$$\dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}_0 = \omega_0$$

$$\dot{\phi} \sin^2 \theta = \text{cte} = \left(\frac{v_0}{R \sin \theta_0} \right) \sin^2 \theta_0 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{R}$$

$$\dot{\phi} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{R \sin^2 \theta} \quad \left\{ \text{reemplazamos en la ecuación de } \hat{r} \right.$$

$$N = mg \cos \theta + mR \sin^2 \theta \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{R \sin^2 \theta} \right)^2 - \frac{mv_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg \cos \theta - \frac{mv_0^2}{R} \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \right)^2 - \frac{mv_0^2}{R}} \quad \left\{ N(\theta) \right.$$



a) de la ec. de mov. deriv.

$$\hat{x}) \quad m \ddot{x} = -kx \pm \mu N \quad \left\{ \begin{array}{l} (+): \text{hacia la dcha.} \\ (-): \text{hacia la izq.} \end{array} \right.$$

$$\hat{y}) \quad N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{después} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \mu g, \text{ la EDO queda:}$$

$$\Rightarrow \left[\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu g = 0 \right] \text{ si } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Para calcular la frecuencia de pequeños oscilaciones cambiaremos la ecuación con:

$$z = x - c; \quad \dot{z} = \dot{x}; \quad \ddot{z} = \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}(z+c) - \mu g = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z + \underbrace{\omega_0^2 c - \mu g}_A = 0, \text{ se quiere que } A=0$$

$$\Rightarrow z = x - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$\hookrightarrow c = \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \omega_0: \text{ depende del resorte} \\ \text{y de la masa, no del peso.} \end{array} \right\}$$

Con lo que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ } ¿? Resorte lineal, no de peg.
 $\rightarrow$ El periodo T queda:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{No depende de la} \\ \text{amplitud } \Delta. \end{array} \right\}$$

* El caso con $fr < 0$ lo análogo.

b) Se tiene que la solución de la EDO es:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\mu g}{\omega_0^2}, \text{ ya que } \dot{x}(t=0) = 0$$

Con esto: $\Delta = A_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \hookrightarrow A_0 = \Delta - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \quad (*)$

La velocidad queda:

$$\dot{x}(t) = -A_0 \sin(\omega_0 t); \text{ cuando } t = \frac{\pi}{\omega_0}, \dot{x} = 0$$

Entonces en $t = \frac{\pi}{\omega_0}$: $x(t) = A_0 \cos\left(\frac{\pi}{\omega_0} \omega_0\right) + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$$\Rightarrow x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\left[\Delta - \frac{2\mu g}{\omega_0^2}\right] = -A_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2}, \text{ cuando } (*)$$

ahora, el roce apunta hacia el otro lado.
 posición de equilibrio

$$[m\ddot{x} = -Kx - \mu mg] \quad \text{se mueve hacia la derecha}$$

$$\rightarrow x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) - \frac{\mu g}{\omega_0^2}; \quad \text{con } t = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow -\left[\Delta - \frac{2\mu g}{\omega_0^2}\right] = -A_1 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \Rightarrow A_1 = \Delta - \frac{2\mu g}{\omega_0^2}$$

Con esto, razón entre las amplitudes es:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{\Delta - \frac{\mu g}{\omega_0^2}}{\Delta - \frac{2\mu g}{\omega_0^2}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{La diferencia es:} \\ [A_0 - A_1 = \frac{2\mu g}{\omega_0^2}] \text{ Indep. de } \Delta \end{array} \right.$$

Es propio del entorno y m. $\leftarrow$ La amplitud disminuye con el roce cinem.

Pero... sabemos además que se puede postular en términos del trabajo y la energía:

$$\begin{cases} (\leftarrow) \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g \\ (\rightarrow) \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g \end{cases} \quad \} \pm \mu g$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \pm \mu g \quad / \cdot x$$

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = \pm \mu g \dot{x} \quad / \text{int. por } \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{x})^2 + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = \pm \mu g x \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \mp \mu g x = \text{constante} = E$$

$$\text{En } \dot{x} = 0 \text{ (detenido)}$$

$$E = \frac{\omega_0^2 x_1^2}{2} \mp \mu g x_1 = \frac{\omega_0^2 x_2^2}{2} \mp \mu g x_2$$

$$\frac{E}{A^2} \Rightarrow \frac{2E}{\omega_0^2} = x_1^2 \mp \frac{2\mu g}{\omega_0^2} x_1$$

$$= x_1 \left(x_1 \pm \frac{2\mu g}{\omega_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2E}{x_1 \omega_0^2} = \frac{dx}{dt} = x_1 \pm \frac{2\mu g}{\omega_0^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ya que} \\ E = \text{cte} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dx}{dt} = x_0 = x_1$$

$$\Rightarrow x_1 \pm \frac{2\mu g}{\omega_0^2} = x_0$$

$$\Rightarrow x_0 - x_1 = \pm \frac{2\mu g}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x_0 - x_1 = \frac{2\mu g}{\omega_0^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Factor de} \\ \text{disposición} \end{array} \right\}$$

salimos que
el roce produce
que $x_1 < x_0$
 $\Rightarrow x_0 - x_1 > 0$

[no es la
energía mecánica
usual [E/m]]