

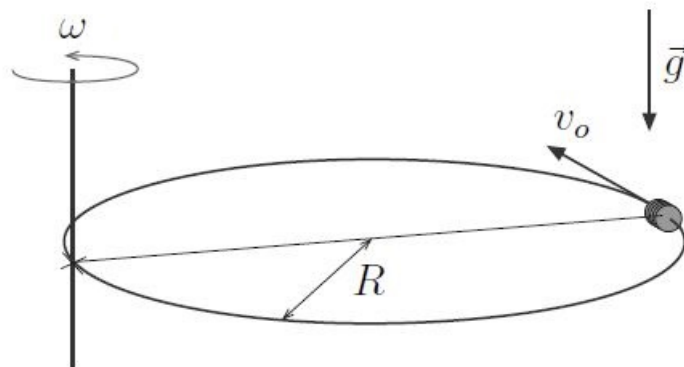
Ejercicio 6: Sistemas de referencia no inerciales

2 de junio de 2017

Tiempo: 60 min

Un radio de radio R se hace girar con velocidad angular constante ω en un plano horizontal vertical a un eje que pasa por un punto del aro. Un anillo de masa m puede deslizarse sin roce a lo largo del aro. Estando el anillo inicialmente diametralmente opuesto al eje de rotación se le entrega una velocidad inicial (relativa al aro) de v_0 , en la misma dirección de giro.

- Plantee los sistemas de referencia S y S' y encuentre los vectores \vec{R} , $\vec{\Omega}$, \vec{F} , \vec{r}' , \vec{v}' y \vec{a}' .
- Plantee la ecuación general y sepárela en ecuaciones escalares.
- Encuentre una expresión en término de ϕ y $\dot{\phi}$ para la normal \vec{N} .
- A partir de las ecuaciones escalares plantee una expresión para $\ddot{\phi} = f(\phi)$, cuál es la frecuencia de pequeñas oscilaciones?
- Cuánto debe ser la velocidad inicial v_0 mínima para que el anillo de masa m alcance a llegar al eje vertical? (Considere que la posición inicial es $\phi = 0$). Expresé este valor mínimo en términos solo de ω y R .



Desarrollo del Problema

- En primer lugar plantearemos los sistemas de referencia como se muestran en la figura. Consideraremos las siguientes equivalencias:

$$\hat{k} = \hat{k}' \quad (1)$$

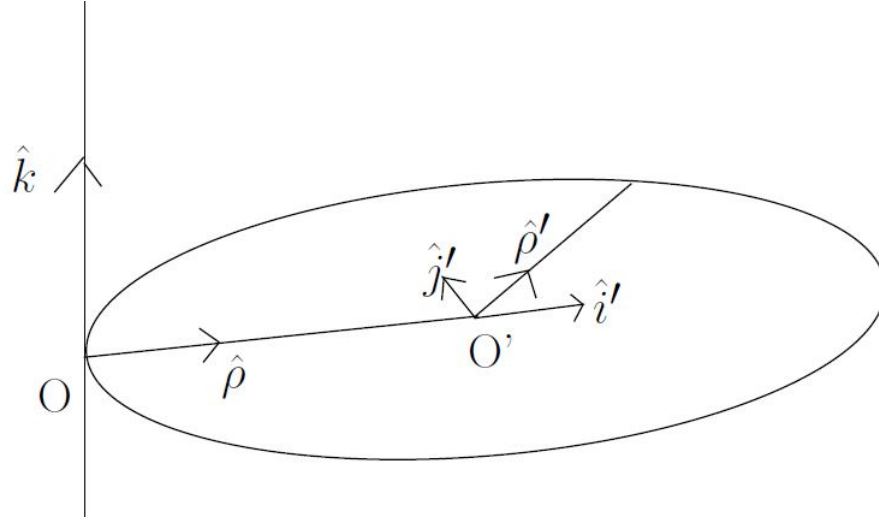
$$\hat{\rho} = \hat{i}' \quad (2)$$

$$\hat{\rho}' = \cos \phi \hat{i}' + \sin \phi \hat{j}' \quad (3)$$

$$\hat{i}' = \cos \phi \hat{\rho}' - \sin \phi \hat{\phi}' \quad (4)$$

El vector posición del punto O' quedaría descrito por:

$$\vec{R} = R\hat{\rho} = R\hat{i}' \rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\omega^2\hat{\rho} = -R\omega^2\hat{i}' \quad (5)$$



Por otra parte notamos que el vector \hat{k}' no cambia a lo largo de tiempo (respecto al sistema S), pero los vectores \hat{i}' y \hat{j}' , sí. Estos se ubican en el plano XY del sistema S por tanto la velocidad angular será:

$$\vec{\Omega} = \omega \hat{k} = \omega \hat{k}' \rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0 \quad (6)$$

Las fuerzas presentes son el peso y la normal (radial y axial, no angular).

$$\vec{F} = -mg\hat{k} - N_\rho\hat{\rho}' + N_k\hat{k}' \quad (7)$$

La posición de la partícula se puede describir como el movimiento una partícula con $r = R$ y ϕ desconocido.

$$\vec{r}' = R\hat{\rho}' \quad (8)$$

$$\vec{v}' = R\dot{\phi}\hat{\phi}' \quad (9)$$

$$\vec{a}' = R\ddot{\phi}\hat{\phi}' - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}' \quad (10)$$

b) Podemos plantear los términos de la ecuación general así:

- $m\vec{a}'$. Basta multiplicar por la masa:

$$m\vec{a}' = -mR\dot{\phi}^2\hat{\rho}' + mR\ddot{\phi}\hat{\phi}' \quad (11)$$

- \vec{F} . Este término lo debemos reescribir en términos del sistema de coordenadas cilíndrico de S' .

$$\vec{F} = -mg\hat{k}' - N_\rho\hat{\rho}' + N_k\hat{k}' \quad (12)$$

- $-m\ddot{R}$. Nos queda:

$$-m\ddot{R} = mR\omega^2\hat{i}' = mR\omega^2\cos\phi\hat{\rho}' - mR\omega^2\sin\phi\hat{\phi}' \quad (13)$$

- $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$. Nos queda:

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' = (\omega \hat{k}') \times (R \hat{\rho}') = \omega R \hat{\phi}' \quad (14)$$

$$\rightarrow -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = -m(\omega \hat{k}') \times (\omega R \hat{\phi}') = mR\omega^2 \hat{\rho}' \quad (15)$$

- $-m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$. Tenemos:

$$-m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = -m(\omega \hat{k}') \times (R \dot{\phi} \hat{\phi}') = 2m\omega R \dot{\phi} \hat{\rho}' \quad (16)$$

Ahora sumamos todos estos términos y separamos por ecuaciones escalares y nos queda:

$$\hat{\rho}') \quad -mR\dot{\phi}^2 = -N_\rho + mR\omega^2 \cos \phi + mR\omega^2 + 2mR\omega \dot{\phi} \quad (17)$$

$$\hat{\phi}') \quad mR\ddot{\phi} = -mR\omega^2 \sin \phi \quad (18)$$

$$\hat{k}') \quad 0 = -mg + N_k \quad (19)$$

- c) De la ecuación escalar radial y axial podemos despejar las componentes de la normal:

$$N_k = mg \quad (20)$$

$$N_\rho = mR\dot{\phi}^2 + mR\omega^2 \cos \phi + mR\omega^2 + 2mR\omega \dot{\phi} \quad (21)$$

$$\rightarrow \vec{N} = (mR\dot{\phi}^2 + mR\omega^2 \cos \phi + mR\omega^2 + 2mR\omega \dot{\phi}) \hat{\rho}' + mg \hat{k}' \quad (22)$$

- d) De la ecuación angular tenemos que:

$$\ddot{\phi} = -\omega^2 \sin \phi \quad (23)$$

Para pequeñas oscilaciones esta expresión nos queda:

$$\approx \ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 \rightarrow \omega_{po} = \omega \quad (24)$$

- e) Podemos integrar la ecuación angular y obtenemos lo siguiente (usando el hecho de que inicialmente $\phi = 0$ y $\dot{\phi} = v_0/R$, y que finalmente $\phi = \pi$ y $\dot{\phi} \geq 0$). O sea:

$$\ddot{\phi} = -\omega^2 \sin \phi \quad (25)$$

$$\dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\omega^2 \sin \phi \quad (26)$$

$$\dot{\phi} d\dot{\phi} = -\omega^2 \sin \phi d\phi \quad (27)$$

$$\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}(0)^2 = 2\omega^2(\cos \pi - \cos 0) = -4\omega^2 \quad (28)$$

$$\rightarrow \dot{\phi}^2 = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 - 4\omega^2 > 0 \quad (29)$$

$$\rightarrow \frac{v_0}{R} > 2\omega \rightarrow v_0 > 2\omega R \quad (30)$$

El valor mínimo para que la partícula alcance a llegar al eje entonces será:

$$v_{0,min} = 2\omega R \quad (31)$$