

## Ejercicio 5: Órbitas planetarias

### 26 de mayo de 2017

### Tiempo: 60 min

Dos satélites ( $S_1$  y  $S_2$ ) giran en torno a la Tierra, de masa  $M$ , cada uno con masa  $m$ . Ambos giran en sentido antihorario, donde el primero órbita de forma circular de radio  $R$ , y el segundo está en una órbita elíptica de radio menor  $r_{min} = R$  y radio mayor  $r_{max} = 8R$ . En un cierto instante ambos satélites se acoplan (lo cual ocurre en un periodo  $\Delta t$  ínfimo), formando un satélite compuesto  $S_{12}$ . Durante el acoplamiento se conserva el momento angular total, pero no la energía.

- a) Calcule la velocidad  $v_\odot$  del satélite  $S_1$  en su órbita circular, y su momento angular  $L_1$ .

Aquí basta con hacer un balance de fuerza considerando que  $r = R$ , entonces  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  y que  $\ddot{\phi} = 0$  dado que el satélite  $S_1$  gira con velocidad angular constante (órbita estable)  $\omega$  y con velocidad  $v_\odot$ . Luego,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F(r) \rightarrow -\frac{GMm}{R^2} = -m\frac{v_\odot^2}{R} \rightarrow v_\odot = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (1)$$

Dada esa velocidad se puede calcular el momento angular:

$$\vec{L}_1 = m\vec{r} \times \vec{v} = m(R\hat{\rho}) \times (v_\odot\hat{\theta}) = m\sqrt{GMR}\hat{k} \rightarrow L_1 = m\sqrt{GMR} \quad (2)$$

- b) Calcule la velocidad del satélite  $S_2$  en los puntos  $A$  y  $B$ , luego calcule su momento angular  $L_2$ .

En la elipse podemos aplicar conservación de momento angular y de la energía mecánica total, las que podemos plantear como:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{8R} \quad (3)$$

$$mRv_B = m \cdot 8Rv_A \rightarrow v_A = \frac{v_B}{8} \quad (4)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 \left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{1}{8}\right) \quad (5)$$

$$\rightarrow v_B = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM}{R}} \rightarrow v_A = \frac{v_B}{8} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (6)$$

Conociendo las velocidades en  $A$  y  $B$  se puede calcular el momento angular en cualquiera de estos dos puntos como sigue:

$$L_2 = mRv_B = \frac{4}{3}m\sqrt{GMR} \quad (7)$$

- c) Cuánta es la energía total  $E_i$  y el momento angular total  $L_i$  antes del acoplamiento? (Debe quedarle en términos de  $G$ ,  $M$ ,  $m$  y  $R$ ).

El momento angular total será la suma del momento angular de ambos satélites, o sea:

$$L_i = L_1 + L_2 = \frac{7}{3}m\sqrt{GMR} \quad (8)$$

Y la energía total, de ambos satélites, será la suma de la energía mecánica total de cada uno de ellos, así:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{\odot}^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R} \quad (9)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{9R} \quad (10)$$

$$E_i = E_1 + E_2 = -\frac{11}{18} \frac{GMm}{R} \quad (11)$$

d) Cuál es la velocidad resultante  $v_{B,12}$  del satélite  $S_{12}$  después del acoplamiento?

Por conservación de momento angular podemos plantear que:

$$L_i = L_f = (2m)(R)(v_{B,12}) \rightarrow v_{B,12} = \frac{7}{6} \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (12)$$

e) Cuál es el nuevo radio máximo  $r_{A'} = \alpha R$  (encuentre  $\alpha$ ) y la velocidad en el punto  $A'$ ,  $v_{A',12}$ ?

En la nueva órbita se conoce el radio mínimo  $R$  y la velocidad en ese punto  $v_{B,12}$ , pero falta conocer el radio máximo  $r_{A'}$  y la velocidad  $v_{A',12}$ , para lo cual podemos plantear conservación de energía y momento angular.

$$\frac{1}{2}mv_{B,12}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_{A',12}^2 - \frac{GMm}{\alpha R} \quad (13)$$

$$mRv_{B,12} = m\alpha Rv_{A,12} \rightarrow v_{A',12}^2 = \frac{v_{B,12}^2}{\alpha^2} \quad (14)$$

$$\rightarrow \frac{49}{72} \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R} = \frac{49}{72\alpha^2} \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{\alpha R} \quad (15)$$

$$\rightarrow 23\alpha^2 - 72\alpha + 49 = 0 \quad (16)$$

$$\alpha \in \{1, 2.1304\} \quad (17)$$

Para el valor de  $\alpha$  bastaba con colocar la expresión resultante por la fórmula cuadrática. Por tanto el radio máximo es conocido, para la velocidad en  $A'$  usamos que:

$$v_{A',12} = \frac{7}{6\alpha} \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (18)$$

f) Cuál es la energía total final  $E_f$  del satélite  $E_{12}$ ? Cuánta energía se perdió ( $\Delta E$ )? Expréselo en término de  $G$ ,  $M$ ,  $m$  y  $R$ .

La energía total la podemos expresar en el punto  $B$ , como sigue:

$$E_f = \frac{1}{2}(2m)v_{B,12}^2 - \frac{GM(2m)}{R} = \frac{49}{36} \frac{GMm}{R} - 2 \frac{GMm}{R} \quad (19)$$

$$E_f = -\frac{23}{36} \frac{GMm}{R} \quad (20)$$

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GMm}{36R} \quad (21)$$