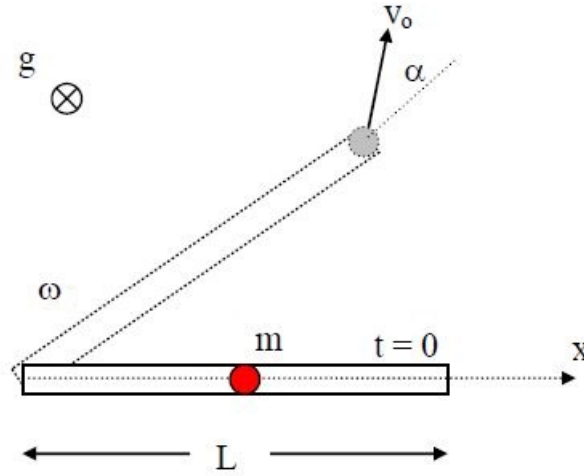


Pauta Ejercicio 3: Cinemática

7 de abril de 2017
Tiempo: 60 min

P1

Un tubo hueco de largo L gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. Por su interior se desplaza una partícula de masa m sin roce. En $t = 0$ la partícula se encuentra en reposo respecto al tubo y en el punto medio de este.



- a) Encuentre una expresión para ρ fijándose en si hay fuerzas o no en la dirección $\hat{\rho}$.

Aun cuando este no es un problema de dinámica, para poder entender bien lo que sucede es necesario fijarse en si existen fuerzas o no en la dirección del tubo, o sea en $\hat{\rho}$. Las fuerzas presentes son la normal \vec{N} que en este caso apunta en \hat{k} y $\hat{\phi}$ y el peso \vec{P} que apunta en \hat{k} . En la dirección $\hat{\rho}$ no existen fuerzas presentes en este caso, las que podrían existir eventualmente son roce dinámico $\vec{f}_{din} = -\mu||\vec{N}||\hat{\rho}$ o viscoso $\vec{F}_{visc} = \pm\gamma||\vec{v}||^n\hat{\rho}$.

Dicho esto, si consideramos que $\vec{F} = m\vec{a}$ podemos decir que la aceleración a_ρ debe ser nula. Lo que sigue entonces es calcular una expresión para la aceleración total y estudiar la componente radial, considerando que $\rho = \rho(t)$ y $\dot{\phi} = \omega$.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho\hat{\rho} \\ \vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\omega\hat{\phi} \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}\end{aligned}\tag{1}$$

Del análisis mencionado sabemos entonces que:

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} - \omega^2\rho &= 0 \rightarrow \rho = A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t) \\ \rho(0) &= \frac{L}{2} \rightarrow \rho(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = \frac{L}{2} \rightarrow A = \frac{L}{2} \\ \dot{\rho}(0) &= 0 \rightarrow \dot{\rho}(0) = A\omega \cdot 0 + B\omega \cdot 1 = 0 \rightarrow B = 0 \\ &\rightarrow \rho(t) = \frac{L}{2} \cosh(\omega t)\end{aligned}\tag{2}$$

b) ¿Cuál es la velocidad \vec{v}_0 con que la partícula sale del tubo?

Para calcular la velocidad a la salida, primero se necesita calcular el instante en que esto ocurre, para lo cual imponemos la condición $\rho(t_0) = L$ y encontraremos una expresión para t_0 .

$$\begin{aligned}\rho(t_0) &= \frac{L}{2} \cosh(\omega t_0) = L \rightarrow \frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2} = 2 \rightarrow e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0} = 4 \\ u = e^{\omega t_0} &\rightarrow u + u^{-1} = 4 \rightarrow u^2 - 4u + 1 = 0 \\ u &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}\end{aligned}\quad (3)$$

Dado que tenemos dos soluciones para u debemos comprobar cuál de las dos tiene sentido físico:

$$u = e^{\omega t_0} \rightarrow t_0 = \frac{1}{\omega} \ln u \quad (4)$$

Por tanto $u = 2 + \sqrt{3}$ de lo contrario t_0 sería negativo (dado que $\ln x < 0$ si $x < 1$ y $u_- = 2 - \sqrt{3} = 0,268 < 1$). Tenemos entonces que $t_0 = \frac{1}{\omega} \ln u_+$ con $u_+ = 2 + \sqrt{3}$.

Calculado entonces el instante en que se llega al extremo del tubo ahora podemos calcular la velocidad \vec{v}_0 .

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \omega \hat{\phi} = \frac{\omega L}{2} \sinh(\omega t) \hat{\rho} + \frac{\omega L}{2} \cosh(\omega t) \hat{\phi} \\ \text{En } t = t_0 &\rightarrow v_\rho = \frac{\omega L}{2} \left(\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2} \right) = \frac{\omega L}{2} \left(\frac{u_+ - u_+^{-1}}{2} \right) \\ &\rightarrow \frac{\omega L}{4} \left(\frac{u_+^2 - 1}{u_+} \right) = \frac{\omega L}{4} 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega L \\ \text{En } t = t_0 &\rightarrow v_\phi = \frac{\omega L}{2} \left(\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2} \right) = \frac{\omega L}{2} \left(\frac{u_+ + u_+^{-1}}{2} \right) = \omega L, \text{ ya que } u + u^{-1} = 4 \\ \vec{v}(t = t_0) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \omega L \hat{\rho} + \omega L \hat{\phi}\end{aligned}\quad (5)$$

c) ¿Cuál es el ángulo α que se forma entre el tubo y la dirección de salida de la partícula?

Para conocer el ángulo de salida α basta con recordar que las coordenadas polares se ajustan a la posición de la partícula, o sea en $t = t_0$ tendremos que $\hat{\rho}$ apunta en la dirección del tubo con ángulo $\omega t_0 = \ln u_+ = 1,32 \text{ rad} = 75,46^\circ$ y el vector unitario $\hat{\phi}$ apuntará perpendicular a $\hat{\rho}$ en sentido antihorario, o sea en $165,46^\circ$. Dicho esto, para calcular el ángulo α se necesita sacar el cociente entre la componente angular y radial de \vec{v}_0 como sigue:

$$\tan \alpha = \frac{v_\theta}{v_\rho} = \frac{\omega L}{\frac{\sqrt{3}}{2} \omega L} = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = 0,86 \text{ rad} = 49,1^\circ \quad (6)$$