

Ejercicio 4: Oscilador armónico amortiguado

7 de abril de 2017
Tiempo: 60 min

P1

Considere un bloque de masa m colocado sobre una superficie horizontal y sujeto por un resorte de largo natural L_0 y constante k , tal como se muestra en la figura. Hay presente una fuerza de roce dinámico de constante μ y el bloque se libera desde el reposo.

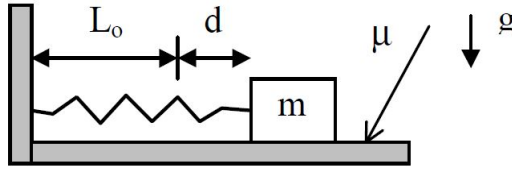


Figura 1: Sistema resorte-masa sujeto a gravedad y roce dinámico. La figura representa el estado inicial del bloque en $t = 0$.

- a) Plantee la ecuación de movimiento en la dirección \hat{x} para la posición x de la masa respecto del muro izquierdo.

Las fuerzas presentes son la del resorte y el roce dinámico, el cual apunta siempre hacia la derecha, mientras el bloque se mueva hacia la izquierda, o sea:

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m\ddot{x}\hat{x} = -k(x - L_0) + \mu mg \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{kL_0}{m} + \mu g = \omega^2(L_0 + \frac{\mu g}{\omega^2}) \quad (1)$$

- b) Resuelva la ecuación aplicando condiciones iniciales apropiadas y encuentre $x(t)$. INDICACIÓN: Puede serle útil usar un cambio de variable del tipo $x = u + \alpha$ y encontrar el valor de α que simplifique algunos términos.

De la ecuación anterior podemos aplicar el cambio de variable $x = u + \alpha$ de modo de encontrar α como sigue:

$$(u + \alpha) + \omega^2(u + \alpha) = \omega^2(L_0 + \frac{\mu g}{\omega^2}) \rightarrow \omega^2\alpha = \omega^2(L_0 + \frac{\mu g}{\omega^2}) \rightarrow \alpha = \frac{\mu g}{\omega^2} \quad (2)$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = L_0 + d$ y $\dot{x}(0) = 0$ y la solución de la ecuación queda:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega^2 u &= 0 \rightarrow u = A \cos(\omega t + \phi_0) \rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) + (L_0 + \frac{\mu g}{\omega^2}) \\ \dot{x}(0) &= -A\omega \sin(\phi_0) = 0 \rightarrow \phi_0 = 0 \\ x(0) &= A \cdot 1 + (L_0 + \frac{\mu g}{\omega^2}) = L_0 + d \rightarrow A = d - \frac{\mu g}{\omega^2} \\ \rightarrow x(t) &= (L_0 + \frac{\mu g}{\omega^2}) + (d - \frac{\mu g}{\omega^2}) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

- c)Cuál es la compresión que sufre el resorte cuando la masa llega hasta el otro extremo?Cuál es la diferencia Δ_1 entre el estiramiento inicial y la compresión final?

En el extremo izquierdo se cumple que $\dot{x} = 0$ en base a esto encontraremos el instante en que ocurre t_1 y la posición x .

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\left(d - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) \sin(\omega t) = 0 \rightarrow \omega t = \pi \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega} \\
 \rightarrow x(t_1 = \frac{\pi}{\omega}) &= \left(L_0 + \frac{\mu g}{\omega^2}\right) + \left(d - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) \cdot -1 = L_0 - d + 2\frac{\mu g}{\omega^2} \\
 x_{comp} &= L_0 - x(t_1) = d - 2\frac{\mu g}{\omega^2} \\
 \Delta_1 &= x_{est} - x_{comp} = d - \left(d - 2\frac{\mu g}{\omega^2}\right) = 2\frac{\mu g}{\omega^2}
 \end{aligned} \tag{4}$$

- d) Ahora plantee las ecuaciones cuando el bloque se empieza a devolver hacia la derecha y encuentre el nuevo estiramiento cuando el bloque llega al extremo derecho. Cuál es la diferencia Δ_2 entre la compresión inicial y el estiramiento final (nuevo)?

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \vec{F} \rightarrow m\ddot{x} = -k(x - L_0) - \mu mg \\
 \ddot{x} + \omega^2 x &= \omega^2 \left(L_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) \rightarrow x(t) = B \cos(\omega t + \phi_0) + \left(L_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) \\
 \dot{x}(t_1) &= -B\omega \sin(\omega t_1 + \phi_0) = 0 \rightarrow \phi_0 = 0 \\
 x(t_1) &= B \cdot 1 + \left(L_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) = L_0 - d + 2\frac{\mu g}{\omega^2} \rightarrow B = 3\frac{\mu g}{\omega^2} - d \\
 x(t) &= \left(L_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) + \left(3\frac{\mu g}{\omega^2} - d\right) \cos(\omega t) \\
 x(t_2) &= \left(L_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) - \left(3\frac{\mu g}{\omega^2} - d\right) = L_0 + d - 4\frac{\mu g}{\omega^2} \\
 x_{est} &= d - 4\frac{\mu g}{\omega^2} \rightarrow \Delta_2 = 2\frac{\mu g}{\omega^2} = \Delta_1
 \end{aligned} \tag{5}$$

- e) Cómo se compara Δ_1 con Δ_2 ? En cuántas oscilaciones completas se detendrá el bloque?

Como $\Delta_1 = \Delta_2$ y son independientes de las condiciones iniciales de cada tramo, podemos decir que la amplitud decrece $2\frac{\mu g}{\omega^2}$ en cada tramo, o sea $\frac{4\mu g}{\omega^2}$ en cada ciclo completo.

En base a esto podemos decir que si en un principio el movimiento tiene una amplitud d se necesitarán N ciclos para que el bloque se detenga donde N cumple:

$$d < n \frac{4\mu g}{\omega^2}, \text{ y } N = \text{mín } n \tag{6}$$

Esta última relación toma en cuenta el hecho de que d puede no ser un múltiplo entero de $\frac{4\mu g}{\omega^2}$. Hay otras formas de definir N usando parte entera por ejemplo.