Auxiliar 5: Oscilador armónico y movimiento forzado
17 de abril del 2017

Problema 2

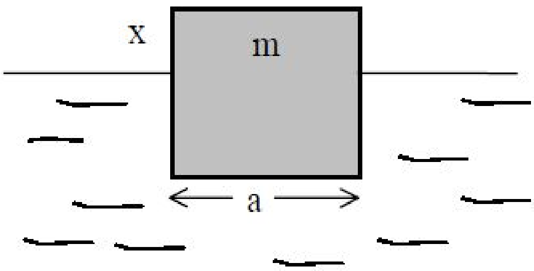
Cubo flotando en líquido [Aceituno, P.B.6]
Un cubo de lado a y masa m que se encuentra sumergido en un líquido, emergea la superficie con una rapidez v_0. El líquido ejerce una fuerza de empuje $E(x)$ donde x es la altura que sobresale la cara superior del cubo por sobre la superficie del líquido. Considere además que existe un roce viscoso lineal de constante b. La expresión para el empuje es la siguiente:

$$\vec{E}(x) = \beta(a - x) \tag{1}$$

a) Qué valores puede tomar x, explique.

b) Considerando que inicialmente la cara superior se encuentra justo en el nivel del agua en reposo, plantee la ecuación de movimiento y encuentre $x(t)$.

c) Qué velocidad alcanza el cubo cuando emerge totalmente y cuál es la máximo aceleración alcanzada, cuándo ocurre?



a) Considerando que x representa cuánto puede sobresalir el cuerpo en primera instancia este valor no puede ser mayor a a de lo contrario significaría que el cuerpo, en particular su cara inferior estaría por sobre el agua. Notar que la expresión para $\vec{E}$ no nos da información sobre esto directamente, para un valor mayor a a el empuje sería negativo lo que no tiene sentido físico, ya que siempre apunta hacia arriba.

Además, considerar que x debe ser mayor a 0, de lo contrario significaría que la cara superior del cuerpo estaría bajo el nivel del agua. Bajo el nivel del agua el bloque aun sentiría un empuje pero este ya no seguiría aumentando porque el bloque desplaza el mismo volumen mientras esté totalmente sumergido, sin importar la profundidad, en este caso la expresión para $\vec{E}$ nos indica que el empuje seguiría creciendo lo cuál no tendría sentido físico.

En base a lo anterior podemos decir que $0 < x < a$.

b) Las fuerzas presentes son el peso del bloque y el empuje quedando el balance de fuerzas como sigue:

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m\ddot{x} = -mg + \beta(a - x) - b\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{\beta}{m}x = \frac{\beta a}{m} - g \tag{2}$$

Podemos hacer un cambio de variable del tipo $x = u + c$ y encontramos c tal que la ecuación se vuelva homogénea.

$$\ddot{u} + \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{\beta}{m}u + \frac{\beta}{m}c = \frac{\beta}{m}(a - \frac{mg}{\beta}) \rightarrow c = a - \frac{mg}{\beta} \tag{3}$$

Si tomamos que $\omega^2 = \frac{\beta}{m}$ y $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}$ entonces nos queda que (asumiendo que estamos en régimen sub-amortiguado, para los otros casos de amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento el desarrollo es similar, solo quedan expresiones diferentes):

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega t + \phi_0) + (a - \frac{mg}{\beta}) \tag{4}$$

Aplicamos condiciones iniciales:

$$\begin{gathered}\dot{x}(0) = A\left(\frac{-1}{2\tau}\cos(\phi_0) - \omega\sin(\phi_0)\right) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2\tau\omega} = \tan\phi_0 \\ x(0) = A\cos\phi_0 + (a - \frac{mg}{\beta}) = 0 \rightarrow A = \frac{-(a-\frac{mg}{\beta})}{\cos\phi_0} = -(a - \frac{mg}{\beta})\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\tau\omega}\right)^2}\end{gathered} \tag{5}$$

c) Cuando está por emerger completamente se cumple que $x = a$ con eso podemos encontrar una condición para $t = t^*$.

$$\begin{gathered}x(t = t^*) = a = a - \frac{mg}{\beta} + Ae^{-\frac{t^*}{2\tau}}\cos(\omega t^* + \phi_0) \rightarrow e^{-\frac{t^*}{2\tau}}\cos(\omega t^* + \phi_0) = \frac{mg}{\beta A} \\ \dot{x} = A\left(-\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega t + \phi_0) - \omega e^{-\frac{t}{2\tau}}\sin(\omega t + \phi_0)\right)\end{gathered} \tag{6}$$

De la condición 1 se puede despejar t^*, en este caso en particular no queda una relación simple y directa, pero eventualmente se puede reemplazar en la expresión para $\dot{x}$ en $t = t^*$ y encontrar la velocidad de salida. Respecto a la aceleración tenemos lo siguiente:

$$\begin{gathered}\ddot{x} = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\left(\frac{\omega}{2\tau}\sin(\omega t + \phi_0) - \omega^2\cos(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{4\tau^2}\cos(\omega t + \phi_0) + \frac{\omega}{2\tau}\sin(\omega t + \phi_0)\right) \\ \ddot{x} = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\left(\frac{\omega}{\tau}\sin(\cdot) + (\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2)\cos(\cdot)\right) \\ \rightarrow \ddot{x} = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\left(\sqrt{(\frac{\omega}{\tau})^2 + (\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2)^2}\cos(\omega t + \phi_1)\right)\end{gathered} \tag{7}$$

Expresión que se puede derivar respecto a t e igualar a 0 para encontrar el valor máximo de la aceleración, conviene usar esta transformación para evitar seguir agregando términos sinusoidales. Dependerá igualmente de los valores de las constantes. Aquí $\phi_1 = \tan(\frac{\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2}{\frac{\omega}{\tau}})$