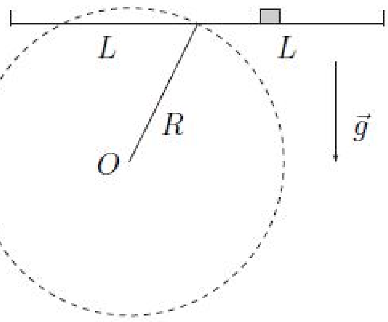
Auxiliar 10: Sistemas de referencia no inerciales
29 de mayo de 2017

Problemas

1. *Movimiento unidimensional sobre una plataforma [Kim Hauser P.6.1]*

Una plataforma de ancho $2L$, rota en el plano de la figura con velocidad angular constante ω alrededor de un punto O, mediante un brazo de largo R demodo que el piso de la plataforma se mantiene siempre horizontal. Al centro de la plataforma se ubica un bloque de masa m que no tiene roce con la plataforma. Plantee los vectores asociados, y analice el sistema de coordenadas a usar para resolver el problema.



Desarrollo del Problema

- En primer lugar, notar que el sistema no inercial S' se ubicará en la plataforma de modo de simplificar el movimiento del bloque en ese sistema, o sea ubicaremos el centro del sistema de referencia en el punto en que se juntan el brazo con la plataforma. Dado esto podemos decir que el vector $\vec{R}$ que describe el punto O' respecto del punto O sería:

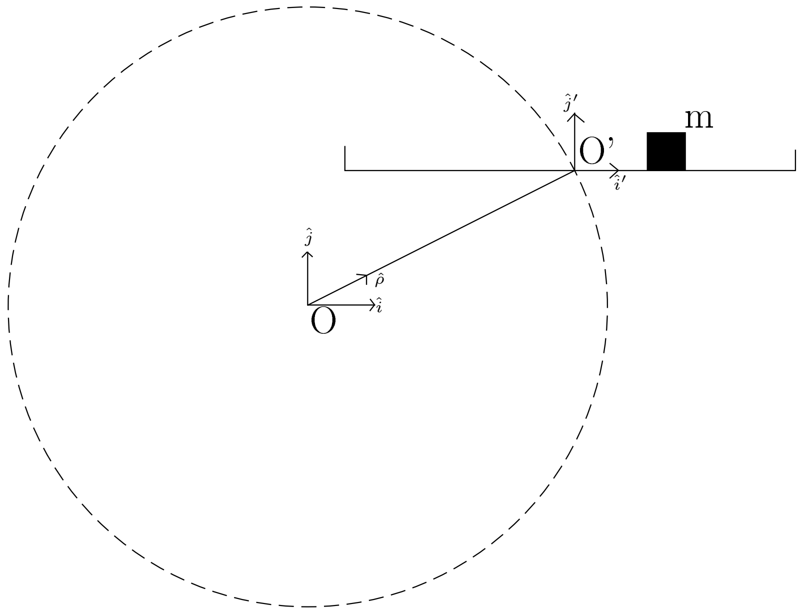
$$\vec{R} = R\hat{\rho} \rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\omega^2\hat{\rho} \tag{1}$$

- Donde R es el largo del brazo y $\hat{\rho}$ es el vector unitario que apunta desde O a O', y corresponde al vector de coordenadas polares usuales en el sistema S. Para luego entender como escribir el vector $\vec{\Omega}$ debemos notar que a medida que la plataforma cambia su posición los vectores unitarios no se ven modificados (el vector $\hat{\imath}'$ siempre apunta en la misma dirección de $\hat{\imath}$, lo mismo para $\hat{\jmath}'$ respecto a $\hat{\jmath}$), por lo que no hay velocidad angular relativa entre ambos sistemas, o sea:

$$\vec{\Omega} = 0 \rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0 \tag{2}$$

- Sobre las fuerzas presentes sobre el cuerpo de masa m, debemos olvidar que el sistema S' rota en torno al sistema S y ubicándonos en el sistema S' debemos identificar cuales son las fuerzas presentes (si nos ubicamos en este sistema en realidad lo único que se mueve es el bloque sobre la superficie) las cuales serían la normal y el peso (eventualmente podría haber roce, pero en este caso se indica que no es así), entonces:

$$\vec{F} = -mg\hat{\jmath}' + N_j\hat{\jmath}' \tag{3}$$



- Resta conocer el valor de los vectores posición, velocidad y aceleración tomando como referencia el sistema S', en este caso el único movimiento presente es unidimensional en la dirección horizontal por lo que:

$$\vec{r}' = x\hat{i}' \tag{4}$$
$$\vec{v}' = \dot{x}\hat{i}' \tag{5}$$
$$\vec{a}' = \ddot{x}\hat{i}' \tag{6}$$

- Ecuación base y sistemas de coordenadas. La ecuación general que rige estos sistemas es la siguiente:

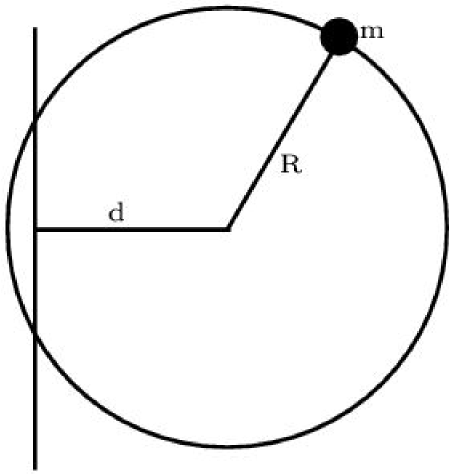
$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \tag{7}$$

Notar que el único término que no estaría escrito en coordenadas cartesianas (del sistema S') sería el término $\ddot{\vec{R}}$, por tanto debemos reescribirlo usando la siguiente relación entre los vectores unitarios:

$$\hat{i} = \hat{i}' \tag{8}$$
$$\hat{j} = \hat{j}' \tag{9}$$
$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j} = \cos\phi\hat{i}' + \sin\phi\hat{j}' \tag{10}$$
$$\to \ddot{\vec{R}} = -R\omega^2(\cos\phi\hat{i}' + \sin\phi\hat{j}') \tag{11}$$

Dado estos vectores, los cuales están todos expresados en el mismo sistema coordenado, se pueden reemplazar en la ecuación general para así llegar a las ecuaciones escalares.

2. *Masa deslizante en un anillo [Kim Hauser P.6.7]* Un anillo puntual de masa m puede deslizar sin roce sobre un aro de radio R de masa despreciable. Este aro gira con rapidez angular ω en torno a un eje a una distancia d de su centro. Plantee los vectores relevantes para analizar el problema.



Desarrollo del Problema

- Primero, se debe ubicar el punto O', para lo cual uno se debe preguntar desde cuál punto sería más fácil describir la trayectoria de la masa m sobre el aro, cuya respuesta sería en el centro del aro de modo que la posición de la masa m siempre está a una misma distancia de forma radial. Dicho esto podemos decir entonces que el vector $\vec{R}$ será:

$$\vec{R} = d\hat{\rho} \rightarrow \ddot{\vec{R}} = -d\omega^2\hat{\rho} \tag{12}$$

Notando que $\hat{\rho}$ siempre apunta desde O hacia O'.

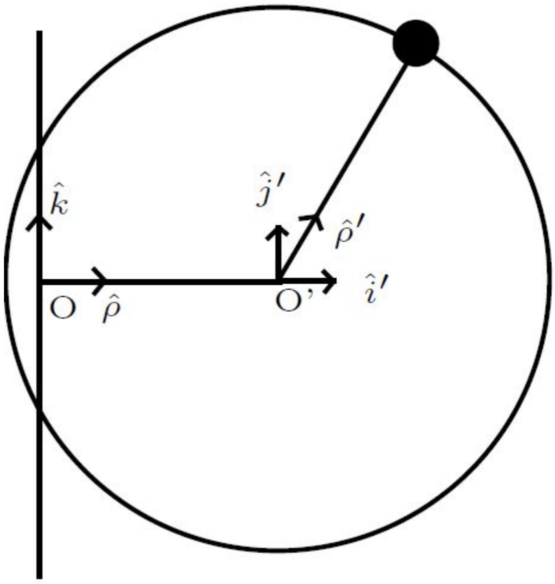
- Luego, para entender cómo es la velocidad angular del sistema S' respecto del S, notar que el movimiento del punto O' ocurre en un plano perpendicular al eje de giro del aro, y que el movimiento de la masa m en el aro ocurre en un plano de giro que coincide con el plano de la circunferencia, o sea un plano que incluye al eje de giro del aro. Dicho esto, podemos ubicar los vectores unitarios recordando que los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ se ubican en el mismo plano (según el sistema de referencia considerado, ya sea S o S'). Podemos decir entonces que se cumplen algunas igualdades como sigue:

$$\hat{k} = \hat{\jmath}' \tag{13}$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}' \tag{14}$$

$$\hat{k}' = -\hat{\phi} \tag{15}$$

Notamos entonces que el vector unitario $\hat{\jmath}'$ siempre apunta hacia arriba, o sea en la dirección de k unitario, por lo que este vector no rota. En cambio, de la figura podemos ver que para distintos instantes el punto O' irá rotando y por tanto los vectores unitarios $\hat{\imath}'$ y $\hat{k}'$ irán rotando igualmente. Como el movimiento rotatorio es en el plano XY del



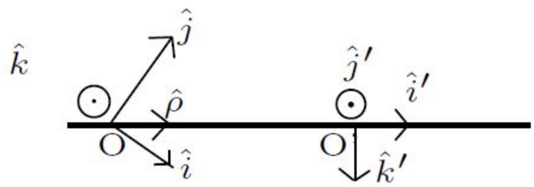


Figura 1: Izquierda: Vista lateral mostrando el eje de giro y el aro de radio R con los vectores unitarios. Derecha: Vista superior donde la línea horizontal corresponde al aro, se indican los sistemas de referencia y los vectores unitarios.

sistema S (el movimiento de los vectores unitarios del sistema S', podemos decir que la velocidad angular debe ser perpendicular a esa plano, o sea:

$$\vec{\Omega} = \omega\hat{k} = \omega\hat{j}' \rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0 \tag{16}$$

Donde la variación temporal del vector $\vec{\Omega}$ es cero debido a que ω es constante y debido a que el vector unitario k es constante en el sistema de referencia S (siempre los vectores unitarios cartesianos son constantes, en cilíndricas los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ no lo son).

- Las fuerzas presentes sobre la masa m son el peso y la normal, siendo esta última descompuesta en una normal radial (de modo que en el sistema de referencia S' la masa pueda mantener la forma circunferencial de su movimiento al estar sujeta al aro) y una en la dirección k debido a que frente al movimiento rotatorio del aro debe existir una fuerza que 'arrastre' a la masa. En la dirección angular no hay normal debido a que nada frena el movimiento. La otra fuerza sería el peso, y no hay roce. El vector de fuerzas nos queda:
$$\vec{F} = -mg\hat{k} - N_\rho\hat{\rho}' + N_k\hat{k}' \tag{17}$$
- La posición de la masa se puede describir como sigue (movimiento en un radio fijo conocido con velocidad angular no conocida):
$$\vec{r}' = R\hat{\rho}' \tag{18}$$
$$\vec{v}' = R\dot{\phi}\hat{\phi}' \tag{19}$$
$$\vec{a}' = R\ddot{\phi}\hat{\phi}' - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}' \tag{20}$$
- Equivalencias entre vectores. Notar que algunas expresiones contienen vectores del sistema S y otras en el sistema S', debemos luego ser capaces de reescribir todo en términos

del mismo sistema de referencia. Algunas equivalencias, en base a la figura, serían las siguientes:

$$\hat{k} = \hat{j}' \tag{21}$$

$$\hat{\rho}' = \cos\phi \hat{i}' + \sin\phi \hat{j}' \tag{22}$$

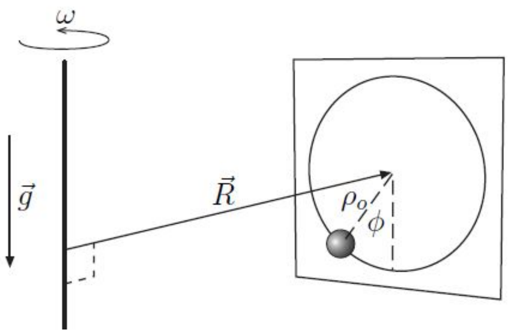
$$\hat{i}' = \cos\phi \hat{\rho}' - \sin\phi \hat{\phi}' \tag{23}$$

En particular estas equivalencias serán útiles a la hora de reescrbir el peso y la velocidad angular en base al sistema de coordenadas polares del sistema de referencia S'.

3. *Movimiento en un plano en rotación [Kim Hauser P.6.5]*

Una circunferencia de radio ρ_0 en un plano vertical, gira en torno a un eje fijo con velocidad angular ω. El centro de la circunferencia describe en su giro una circunferencia de radio R. El plano de la circunferencia siempre se mantiene perpendicular al vector $\vec{R}$ de la figura. Una partícular de masa m puede deslizar sin roce por la circunferencia de radio ρ_0. El problema es describir la ecuación de movimiento para esta partícula y sus propiedades.

a) Defina claramente el sistema S' y los vectores relevantes para el problema.
b) Plantee la ecuación de movimiento reescribiendo todos los términos en un solo sistema de coordendas.
c) Obtenga una ecuación del tipo $\ddot{\phi} = f(\phi)$ y obtenga las condiciones de estabilidad, y la frecuencia de pequeñas oscilaciones.



Desarrollo del Problema

Este problema será desarrollado de forma completa, los primeros dos buscaban familiarizar con la notación y los vectores unitarios. Este problema en particular se irá desarrollando en pasos que corresponden a los siguientes:

a) Dónde y cómo se mueve la partícula.
b) En base al movimiento, dónde convendría tener el origen del sistema (O') de modo que sea más fácil describir el movimiento de la partícula?
c) Plantee los vectores $\vec{R}$, $\vec{\Omega}$ y los vectores unitarios que se necesiten en cada sistema (cartesianos y/o cilíndricos).
d) Escriba los términos $\ddot{\vec{R}}$, $\dot{\vec{\Omega}}$, $\vec{F}$, $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$. Además relacione los distintos vectores unitarios de cada sistema de modo que pueda expresar todos los términos anteriores en un mismo sistema cartesiano.

e) Plantee cada término de la ecuación general de movimiento, y luego sepárela en ecuaciones escalares.

f) Comience a responder lo pedido, en general se intenta encontrar una relación para ϕ y sus derivadas, los puntos de equilibrio, etc.

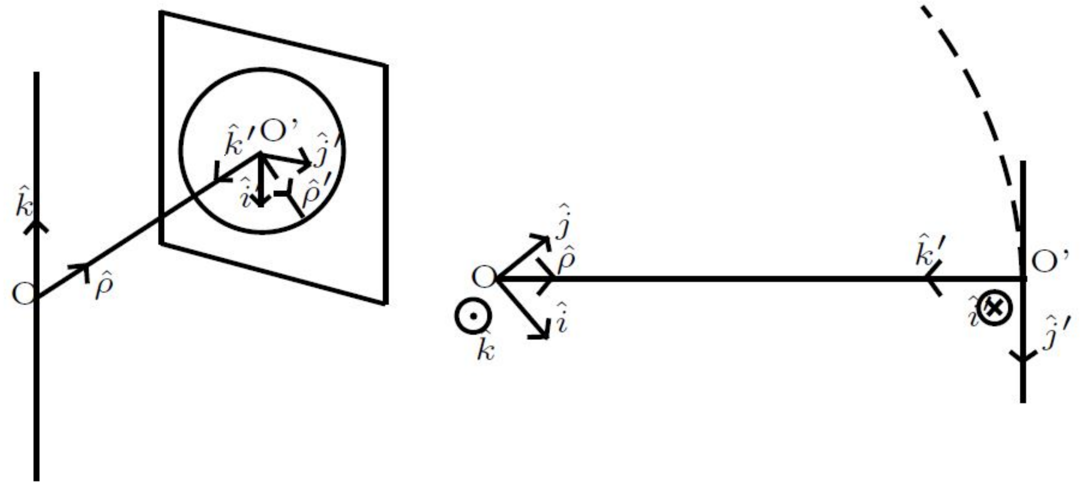


Figura 2: Izquierda: sistemas de referencia con sus vectores unitarios desde una vista oblicua (3D). Derecha: vista superior del eje de giro con el plano vertical mostrando todos los vectores unitarios, recuerde que los vectores $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son siempre fijos (sistema de referencia inercial), y la línea punteda corresponde al movimiento que realizará el origen O' del sistema S' (este arco es solo una parte, dado que el movimiento será una circunferencia completa).

La siguiente enumeración se basa en los pasos indicados recién (no en base al enunciado).

a) Para entender cómo se mueve la partícula conviene ponerse en situaciones: si la velocidad angular ω fuese pequeña, y la partícula está en reposo en el plano vertical, entonces la partícula se mantendría ahí. Si ω fuese grande es probable que la partícula comience a moverse, aun cuando ya nos indican que la partícula se mueve sujeta al plano vertical conviene hacer este ejercicio. Considerando esto podemos indicar que la partícula se mueve en un radio fijo de valor ρ_0 (asumiendo que la partícula se mantiene pegada a la circunferencia). Dependiendo de las condiciones iniciales la partícula puede oscilar en torno a puntos de equilibrio (que encontraremos al final del problema) o realizar giros completos si su energía inicial se lo permite.

b) Dado lo anterior, conviene que el origen del sistema S' se ubique en el centro de la circunferencia y que el plano XY de este sistema de referencia coincida con el plano vertical, por tanto el vector unitario $\hat{k}'$ apunta perpendicular al plano vertical o sea apunta desde O' hacia O. El sistema de referencia inercial se ubicará en el punto imaginario que une el eje vertical con la línea que une el eje con el centro de la circunferencia.

c) Sabemos que el vector $\vec{R}$ describe la posición del punto O' respecto del sistema S, por tanto tenemos que:

$$\vec{R} = R\hat{\rho} \tag{24}$$

Además, debemos escribir la velocidad angular, para esto podemos notar de la figura que a medida que el punto O' describa un círculo en torno a O los vectores unitarios $\hat{\jmath}'$ y

$\hat{k}'$ irán cambiando su dirección, pero el vector unitario $\hat{\imath}'$ siempre apuntará hacia abajo independiente de la posición de O'. Dicho esto como son estos vectores los que varían, y se ubican en el plano XY del sistema de referencia S, podemos decir que la velocidad angular apuntará en una línea perpendicular a este plano, o sea en la dirección k:

$$\vec{\Omega} = \omega\hat{k} \tag{25}$$

Considere que es positivo el valor de ω dado que el sentido de giro es antihorario en el plano XY. De la figura podemos ver que los vectores $\hat{\imath}'$ y $\hat{\jmath}'$ se ubican en el plano donde la partícula de masa m describe su movimiento (en el sistema S'), y el vector $\hat{k}'$ debe apuntar hacia O por regla de la mano derecha. Conviene además escribir el vector $\hat{\rho}'$ entre los vectores $\hat{\imath}'$ y $\hat{\jmath}'$, siendo el ángulo ϕ el que se encuentre entre el vector radial $\hat{\rho}'$ y el vector $\hat{\imath}'$ (esto siempre es así), partiendo desde el vector $\hat{\imath}'$.

d) Podemos decir que las fuerzas presentes son: peso en la dirección $\hat{k}$, y la normal, la cual tiene una componente radial (para que así la partícula pueda describir una circunferencia) y en la dirección k dado que algo debe restringir el movimiento de la partícula al plano (de lo contrario la partícula saldría disparada en la dirección $\hat{\rho}$ al momento de que el plano vertical comience a girar). Entonces:

$$\vec{F} = -mg\hat{k} - N_\rho\hat{\rho}' + N_k\hat{k}' \tag{26}$$

Sobre la variación temporal de los vectores de la parte (c) podemos decir que:

$$\vec{R} = R\hat{\rho} \rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\omega^2\hat{\rho} \tag{27}$$

$$\vec{\Omega} = \omega\hat{k} \rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0 \tag{28}$$

Sobre la posición de la partícula m en el sistema de referencia S' podemos decir que $r = \rho_0$ y que ϕ es desconocido. Entonces:

$$\vec{r}' = \rho_0\hat{\rho}' \tag{29}$$

$$\vec{v}' = \rho_0\dot{\phi}\hat{\phi}' \tag{30}$$

$$\vec{a}' = \rho_0\ddot{\phi}\hat{\phi}' - \rho_0\dot{\phi}^2\hat{\rho}' \tag{31}$$

Nota: en rigor el ángulo ϕ en el sistema S' debiera ser ϕ', ya que el ángulo ϕ es el ángulo entre los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\imath}$ del sistema S, pero como este último ángulo no es relevante para el problema (en general no lo será) por simplicidad de notación decimos que el ángulo es ϕ en el sistema S' (de lo contrario podríamos confundirnos).

e) Ahora viene la tarea de escribir cada término de la ecuación general:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \tag{32}$$

- $m\vec{a}'$. Aquí basta con multiplicar con la masa, la aceleración que ya anotamos en la parte anterior:

$$m\vec{a}' = -m\rho_0\dot{\phi}^2\hat{\rho}' + m\rho_0\ddot{\phi}\hat{\phi}' \tag{33}$$

- $\vec{F}$. Ya conocemos la fuerza, pero se debe escribir en un solo sistema de referencia, de la parte (d) notamos que varios términos ya están escritos en coordenadas cilíndricas del sistema S', por lo que debemos cambiar los que no estén ya en ese sistema adecuadamente. De la fuerza el único término sería el peso y el cambio sería el siguiente:

$$\hat{k} = -\hat{i}' \tag{34}$$

$$\hat{i}' = \cos\phi\hat{\rho}' - \sin\phi\hat{\phi}' \tag{35}$$

$$\rightarrow \vec{F} = mg\cos\phi\hat{\rho}' - mg\sin\phi\hat{\phi}' - N_\rho\hat{\rho}' + N_k\hat{k}' \tag{36}$$

- $-m\ddot{\vec{R}}$. (Conviene incluir de inmediato los signos negativos de la ecuación general, de modo de que después sea simplemente una suma, y así nos ocupamos de todos los signos negativos en una sola parte del desarrollo). Aquí basta con multiplicar y luego modificar el vector unitario, así:

$$\ddot{\vec{R}} = -R\omega\hat{\rho} \tag{37}$$

$$\hat{\rho} = -\hat{k}' \tag{38}$$

$$\rightarrow -m\ddot{\vec{R}} = -mR\omega^2\hat{k}' \tag{39}$$

- $-m\vec{\Omega} \times (\Omega \times \vec{r}')$. (Aquí recordar el orden en que se realiza el producto cruz, dado que esta operación no es asociativa) Ya conocemos los vectores, pero antes de realizar el producto cruz debemos reescribir la velocidad angular en términos del sistema de referencia cilíndrico de S', o sea:

$$\vec{\Omega} = \omega\hat{k} = -\omega\hat{i}' \tag{40}$$

$$\hat{i}' = \cos\phi\hat{\rho}' - \sin\phi\hat{\phi}' \tag{41}$$

$$\rightarrow \vec{\Omega} = -\omega\cos\phi\hat{\rho}' + \omega\sin\phi\hat{\phi}' \tag{42}$$

Ahora podemos llevar a cabo el producto cruz partiendo por el paréntesis y luego con el término exterior.

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' = (-\omega\cos\phi\hat{\rho}' + \omega\sin\phi\hat{\phi}') \times (\rho_0\hat{\rho}') \tag{43}$$

$$= -\omega\rho_0\sin\phi\hat{k}' \tag{44}$$

$$\rightarrow -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = -m(-\omega\cos\phi\hat{\rho}' + \omega\sin\phi\hat{\phi}') \times (-\omega\rho_0\sin\phi\hat{k}') \tag{45}$$

$$= m\rho\omega^2\sin\phi\cos\phi\hat{\phi}' + m\rho\omega^2\sin^2\phi\hat{\rho}' \tag{46}$$

Para calcular los productos cruz recordar que:

$$\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{k} \qquad \hat{\phi} \times \hat{k} = \hat{\rho} \qquad \hat{k} \times \hat{\rho} = \hat{\phi} \tag{47}$$

$$\hat{\rho} \times \hat{k} = -\hat{\phi} \qquad \hat{k} \times \hat{\phi} = \hat{\rho} \qquad \hat{\phi} \times \hat{\rho} = -\hat{k} \tag{48}$$

- $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$. Aquí se puede multiplicar directamente como sigue:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}' = (-\omega\cos\phi\hat{\rho}' + \omega\sin\phi\hat{\phi}') \times (\rho_0\dot{\phi}\hat{\phi}') \tag{49}$$

$$= -\rho_0\omega\phi\cos\phi\hat{k}' \tag{50}$$

$$\rightarrow -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = 2m\rho\omega\dot{\phi}\cos\phi\hat{k}' \tag{51}$$

Teniendo los términos listos, se deben reemplazar en la ecuación general y asociar por cada vector unitario así:

$$\hat{\rho}') \qquad -m\rho_0\dot{\phi}^2 = -N_\rho + mg\cos\phi + m\rho_0\omega^2\sin^2\phi \tag{52}$$

$$\hat{\phi}') \qquad m\rho_0\ddot{\phi} = -mg\sin\phi + m\rho_0\omega^2\sin\phi\cos\phi \tag{53}$$

$$\hat{k}') \qquad 0 = -mR\omega^2 + N_k + 2m\rho_0\omega\dot{\phi}\cos\phi \tag{54}$$

- En primer lugar podemos comentar cada ecuación por separada, antes de comenzar a responder lo pedido: sobre la ecuación radial podemos notar que la normal N_ρ es desconocida y la variable ϕ también, así que de esta ecuación podemos reescribir la normal en término de ϕ como sigue:

$$N_\rho = m\rho_0\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi + m\rho_0\omega^2\sin^2\phi \tag{55}$$

Así que si conociéramos $\dot{\phi}$ en términos de ϕ tendríamos una expresión para N_ρ en función de ϕ. Con esto podríamos estudiar si la partícula de masa m se mantiene pegada a la circunferencia del plano vertical, condición que se expresaría como $N_\rho > 0$.

Sobre la ecuación escalar en k podemos despegar la normal N_k en términos de la posición angular ϕ:

$$N_k = mR\omega^2 - 2m\rho\omega\dot{\phi}\cos\phi \tag{56}$$

Nuevamente podríamos imponer que $N_k > 0$ para asegurar que la partícular se mantenga pegada al plano vertical, lo cual dependerá del ángulo ϕ.

De la ecuación angular notamos que la única incógnita es ϕ y sus derivadas, por lo que es una EDO con variable desconocida ϕ. Esta ecuación la podemos reescribir como sigue:

$$\ddot{\phi} = f(\phi) = -\frac{g}{\rho_0}\sin\phi + \omega^2\sin\phi\cos\phi \tag{57}$$

Podemos analizar esta ecuación para encontrar los puntos de equilibrio, imponiendo que $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$, con lo cual podremos imponer condiciones para ϕ:

$$0 = \sin\phi\left(\omega^2\cos\phi - \frac{g}{\rho_0}\right) \tag{58}$$

Para que esta ecuación se cumpla el primer término o el segundo deben ser cero, o sea:

$$\sin\phi = 0 \rightarrow \phi_1 = 0 \quad \phi_2 = \pi \tag{59}$$

$$\omega^2\cos\phi - \frac{g}{\rho_0} \rightarrow \cos\phi = \frac{g}{\rho_0\omega^2} \rightarrow \phi_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{\rho_0\omega^2}\right) \tag{60}$$

En la condición para $\cos\phi$ aparecen dos valores de ϕ dado que se trata de una función par centrada en $\phi = 0$, pero esto solo es posible si la constante $\frac{g}{\rho_0\omega^2}$ es menor a 1, dado que $|\cos\phi| < 1$. Considerando que ρ_0 y g son fijos notamos que ω debe ser lo suficientemente grande para que esta constante sea menor a 1, o sea:

$$\frac{g}{\rho_0\omega^2} \leq \sqrt{\frac{g}{\rho_0}} \leq \omega \tag{61}$$

Entonces ω debe ser mayor a este valor para que puedan existir estos puntos de equilibrio, notar que $-\pi \leq \phi \leq \pi$.
Además, podemos estudiar que sucede para pequeñas oscilaciones ($\sin\phi \approx \phi$ y $\cos\phi \approx 1$). Con lo cual nos queda:

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{\rho_0} - \omega^2\right)\phi = 0 \rightarrow \ddot{\phi} + k\phi = 0 \tag{62}$$

Notamos que si k es positivo ($k = +\Gamma^2$) la solución para ϕ será sinusoidal $\phi(t) = A\cos(\Gamma t + \phi_0)$, con lo cual el movimiento será acotado en torno a un punto de equilibrio (donde las constantes estarán dadas por las condiciones iniciales). En cambio, si k es negativo ($k = -\Gamma^2$) la solución será del tipo:

$$\phi(t) = A\cosh(\Gamma t) + B\sinh(\Gamma t) \tag{63}$$

Donde ambas funciones hiperbólicas aumentan su valor a medida que el tiempo crece (donde las constantes estarán dadas por las condiciones iniciales), estas funciones hiperbólicas son exponencial siempre creciente por lo que el movimiento no sería estable para ningún punto inicial o de equilibrio. La condición que necesitamos entonces es que:

$$k > 0 \rightarrow \frac{g}{\rho_0} - \omega^2 > 0 \rightarrow \omega < \sqrt{\frac{g}{\rho_0}} \tag{64}$$

Notamos que la condición es el complemento de la otra condición que encontramos para los puntos de equilibrio, el valor crítico sería entonces $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\rho_0}}$. En resumen, podemos decir que:

- $\omega < \omega_0$. Los puntos de equilibrio generales son $\phi = 0$ y $\phi = \pi$, y ambos serían inestables para pequeñas oscilaciones.
- $\omega = \omega_0$. Los puntos de equilibrio serían $\{0, \pi, \arccos\left(\frac{g}{\rho_0\omega^2}\right), -\arccos\left(\frac{g}{\rho_0\omega^2}\right)\}$, y para pequeñas oscilaciones serían inestables $\ddot{\phi} = 0 \rightarrow \phi = At + B$.
- $\omega > \omega_0$. Los puntos de equilibrio serían $\{0, \pi, \arccos\left(\frac{g}{\rho_0\omega^2}\right), -\arccos\left(\frac{g}{\rho_0\omega^2}\right)\}$, y no serían estables bajo pequeñas oscilaciones.