Universidad de Chile - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
FI 2001 - Mecánica - Otoño 2017
Profesor: Claudio Romero / **Auxiliares:** Jerónimo Herrera y Juan Rojas

Auxiliar 7: Conservación de momentum angular, oscilaciones y fuerzas centrales
3 de mayo de 2017

Conceptos Útiles

a) $\vec{F} = -\nabla U$

b) $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$

c) $\omega_{po}^2 = \frac{\frac{d^2U}{dr^2}|_{r=r_0}}{m}$

d) $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$

e) $\vec{p} = m\vec{v}$

f) $U_{resorte} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Problemas

1. *Órbitas generalizadas [Kim Hauser P.5.8]*
Considere el movimiento de una partícular de masa m bajo la acción de una fuerza central del tipo:

$$\vec{F} = -\alpha r^n \hat{r} \text{ con } \alpha > 0 \tag{1}$$

El valor del momentum angular $l = mr^2\dot{\phi}$ es conocido.

a) Plantee las ecuaciones de movimiento e intente resolverlas.

b) Obtenga una expresión para la energía mecánica total y el potencial efectivo.

c) Determine el radio de la órbita circular y el periodo de pequeñas oscilaciones.

d) Determine para cuáles valores de n existen órbitas cerradas.

Desarrollo del problema

a) Las ecuaciones de movimiento corresponden a las siguientes:

$$\vec{F} = -\alpha r^n \hat{r} \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi} \tag{2}$$

Aquí se debe considerar que dado que se trata de una fuerza central solo tiene una componente radial que apunta directamente hacia el centro (o hacia afuera), esto también nos indica que el movimiento ocurre en una plano dado que no hay ninguna fuerza axial (en $\hat{z}$) que desplace la partícular, por eso podemos usar siempre coordenadas polares cuando se trate de fuerzas centrales. Otro punto importante es que no hay fuerzas angulares, por tanto la componente angular de la aceleración será nula y podemos reescribirla para obtener información útil así:

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) \tag{3}$$

$$\hat{r}) \quad m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\alpha r^n \tag{4}$$

$$\hat{\phi}) \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \rightarrow mr^2\dot{\phi} = C \tag{5}$$

Donde la constante C es en realidad el momentum angular l, ya que:

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(r\hat{r}) \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi})\hat{\phi} = mr^2\dot{\phi}\hat{k} = \vec{l} = l\hat{k} \tag{6}$$

Sobre la ecuación radial aun cuando no se puede resolver, podemos obtener lo siguiente (asumiendo que $r(0)$ y $\dot{r}(0)$ conocidos):

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha}{m}r^n \tag{7}$$

$$\dot{r}\frac{\dot{r}}{dr} = r\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha}{m}r^n \tag{8}$$

$$\dot{r}\frac{\dot{r}}{dr} = r\frac{l^2}{m^2r^4} - \frac{\alpha}{m}r^n \tag{9}$$

Donde usamos el hecho de que como $l = mr^2\dot{\phi}$ entonces $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$, si integramos obtenemos que:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 - \dot{r}(0)^2) = \frac{-l^2}{2m^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r(0)^2}\right) - \frac{\alpha}{m(n+1)}(r^{n+1} - r(0)^{n+1}) \tag{10}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{-l^2}{m^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r(0)^2}\right) - \frac{2\alpha}{m(n+1)}(r^{n+1} - r(0)^{n+1}) + \dot{r}(0)^2} = f(r) \tag{11}$$

$$\frac{dr}{f(r)} = dt \rightarrow \int_{r(0)}^{r} \frac{dr}{f(r)} = t \tag{12}$$

Si pudiéramos integrar la última ecuación podríamos encontrar $r(t)$ y así describir en detalle las órbitas que puede tener la partícula, pero en este caso solo se puede resolver para $n = -2$ (fuerza gravitatoria). Lo que si encontramos es $\dot{r}$ como una función de r (donde la función f solo viene a abreviar lo que ya estaba escrito).

b) La energía mecánica total se define como $E = K + U$ donde K es la energía cinética y U es el potencial asociado a la fuerza, el cual debemos encontrar (una fuerza central $\vec{F}$ siempre cumple que $\nabla \times \vec{F} = 0$ (comprobar!)), así:

$$\vec{F} = -\nabla U \rightarrow -\alpha r^n\hat{r} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} \rightarrow U(r) = \frac{\alpha}{n+1}r^{n+1} \tag{13}$$

Sobre la energía cinética K podemos calcularla así:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \tag{14}$$

$$V^2 = ||\vec{v}||^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \tag{15}$$

$$K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \tag{16}$$

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{m^2r^4}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2r^2}) \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Podemos escribir la energía mecánica total E como sigue:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef}(r) \tag{19}$$

Donde se define el potencial efectivo como $U_{ef} = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$.

c) Ahora para estudiar las posibles órbitas de la partícula se debe estudiar en detalle el potencial efectivo. El radio de la órbita circular se define como la posición r_0 donde el potencial efectivo alcanza su mínimo, entonces:

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = \alpha r^n - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \to r^{n+3} = \frac{l^2}{m\alpha} \to r_0 = \left(\frac{l^2}{m\alpha}\right)^{\frac{1}{n+3}} \tag{20}$$

El período de pequeñas oscilaciones se define como:

$$\omega_{po}^2 = \frac{\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}|_{r=r_0}}{m} = \frac{1}{m}\left(\alpha n r^{n-1} + \frac{3l^2}{mr^4}\right)\Big|_{r=r_0} = \frac{1}{mr_0^4}\left(\alpha n r_0^{n+3} + \frac{3l^2}{m}\right) \tag{21}$$

$$\omega_{po}^2 = \frac{1}{m\left(\frac{l^2}{m\alpha}\right)^{\frac{4}{n+3}}}(n\frac{l^2}{m} + 3\frac{l^2}{m}) = \frac{l^2}{m^2\left(\frac{l^2}{m\alpha}\right)^{\frac{4}{n+3}}}(n+3) \tag{22}$$

$$\omega_{po} = \frac{l}{m}\sqrt{n+3}\left(\frac{l^2}{m\alpha}\right)^{\frac{-2}{n+3}} \tag{23}$$

d) Para determinar si las órbitas son cerradas para pequeñas oscilaciones respecto de la órbita circular se debe calcular $\dot{\phi}(r = r_0)$, y calcular la proporción entre ω_{po} y $\dot{\phi}(r = r_0)$, o sea:

$$\dot{\phi}(r = r_0) = \frac{l}{mr_0^2} = \frac{l}{m}\left(\frac{l^2}{m\alpha}\right)^{\frac{-2}{n+3}} \tag{24}$$

$$k = \frac{\omega_{po}}{\dot{\phi}\Big|_{r=r_0}} = \sqrt{n+3} \tag{25}$$

Si la proporción k es un número entero o racional, podemos decir que se tratará de órbitas cerradas, en cambio si k es un número irracional la órbita es no cerrada. O sea, si $n \in \{1, 6, 13, ...\}$ la órbita será cerrada.

e) Otros tópicos importantes: dado un nivel de energía E este siempre debe ser mayor a $E_0 = U_{ef}(r = r_0)$ de lo contrario la energía cinética tendría que ser negativa. Si conocemos E podemos calcular la posición máxima y mínima (radialmente) que puede tener la partícular, estos son los llamados puntos de retorno y se calculan como sigue:

$$E = K + U_{ef} = U_{ef} = \frac{\alpha}{n+1}r^{n+1} + \frac{l^2}{2mr^2} \tag{26}$$

Esta se puede replantear como sigue:

$$\frac{\alpha}{n+1}r^{n+3} - Er^2 + \frac{l^2}{2m} = 0 \tag{27}$$

Resolver esto para un n cualquier no siempre es posible, pero a modo de ejemplo para $n = 1$, tenemos una ecuación cuadrática para r^2, así:

$$\frac{\alpha}{2}r^4 - Er^2 + \frac{l^2}{2m} = 0 \to r^2 = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - \frac{\alpha l^2}{m}}}{\alpha} \tag{28}$$

Donde $E^2 > \alpha l^2/m$ siempre (compruébelo!), y luego podemos aplicar raíz cuadrado nuevamente para encontrar dos valores para r que llamaremos r_+ y r_- (los valores negativos de r no nos sirven).

2. *Conservación de momentum angular [Aceituno P.G.2]*
Considere el sistema forma por tres partícular A, B y C, todas de masa m colocadas sobre una superficie horizontal sobre la cual pueden deslizar sin roce. Las masa B y C están unidas entre sí por un resorte de constante k y largo natural L_0. La partícula A choca con la partícula B a una velocidad v_0 en la dirección indicada en la figura. Si las partícular A y B quedan unidas después del choque determine:
   a) El movimiento resultante del centro de masa del sistema.
   b) El ángulo de giro θ en función del largo del resorte L. El ángulo θ se considera nulo justo después del choque.
   c) El estiramiento máximo del resorte.

Desarrollo del problema

a) Aquí se debe tener cuidado con entender bien qué es lo que está pasando, lo cual de momento no es muy claro, por lo que se debe confiar en que las ecuaciones nos darán información útil al respecto.

En primer lugar el sistema BC se mantiene quieto (no está estirado ni comprimido) y la masa A se acerca a velocidad constante. Justo después del choque debería comenzar a moverse la partícula B y C, simultáneamente aun cuando parezca que solo la B se moverá en un principio el efecto del resorte será instantáneo sobre la partícula C. Luego, el sistema tendrá dos movimientos: traslacional y rotacional, cómo exactamente?, esto es lo que veremos en la parte a) y b).

Primero debemos notar que el momentum total del sistema se conservará, dado que no hay fuerzas externas que lo modiquen (como el peso o roce). Se cumple entonces que:

$$\vec{p}_{sist,i} = \vec{p}_{sist,f} \to m_A v_0 \hat{i} = (m_A + m_B + m_C) v_{CM} \tag{29}$$

$$m v_0 = 3 m v_{CM} \to v_{CM} = \frac{v_0}{3} \tag{30}$$

Esto nos indica que el centro de masa, una vez que A y B se unen, se mueve horizontalmente hacia la derecha sin importar el movimiento relativo entre AB y C, y sin importar cómo roten estos dos cuerpos alrededor del centro de masa.

b) Ahora, usaremos el hecho de que el momentum angular igualmente se conserva (el momentum del sistema). Se debe tener cuidado en considerar que el momentum se calcula en base a un punto de referencia, el cual será siempre el centro de masa del sistema (puede haber otras opciones pero esta siempre funciona), y además el momentum final se considera para un instante cualquiera luego del choque, o sea el sistema AB-C estará inclinado un ángulo ϕ respecto de la vertical (supondremos que siempre el resorte se ubica entre la masa AB y la masa C, y no está 'suelto'):

$$\begin{aligned}
\vec{l}_i = m_A \vec{r}_A \times \vec{v}_A = m\frac{L_0}{3}\hat{j} \times v_0 \hat{i} = \frac{m L_0 v_0}{3}\hat{k} \text{ justo antes del choque} \\
\vec{l}_f = m_{AB}\vec{r}_{AB} \times \vec{v}_{AB} + m_C \vec{r}_C \times \vec{v}_C = 2m\frac{L}{3}\hat{r} \times (\frac{L}{3}\dot{\phi})\hat{\phi} + m\frac{2L}{3}\hat{r} \times (\frac{2L}{3}\dot{\phi})\hat{\phi} \\
\vec{l}_f = \frac{2L^2}{3} m\dot{\phi}\hat{k} \\
\to \frac{m L_0 v_0}{3} = \frac{2L^2}{3} m\dot{\phi} \to \dot{\phi} = \frac{v_0 L_0}{2L^2}
\end{aligned} \tag{31}$$

Notar que la distancia entre la masa AB y el centro de masa es siempre $L/3$ y entre la masa C y el centro de masa es siempre $2L/3$. Para entender esto suponga que las masa están ubicadas de forma horizontal, con la masa C al lado izquierdo y la masa AB al lado derecho. La ubicación del centro de masa sería la siguiente:

$$x_{CM} = \frac{2m \times L + m \times 0}{3m} = \frac{2L}{3} \tag{32}$$

O sea la distancia entre la masa C y el centro de masa CM será $2L/3$, esto será independiente del ángulo ϕ mencionado anteriormente siempre y cuando el resorte esté el línea recta entre las dos masas.

c) Para entender lo que se pide ahora, el estiramiento máximo L_{max} debemos darnos cuenta que la energía del sistema se conserva y esta incluye el movimiento traslacional del centro de masa, la energía elástica del resorte y la energía cinética rotacional de las masas en torno al centro de masa. Podemos decir entonces que:

$$\begin{aligned} E_i = K_{CM} + U_{resorte} + K_{rot,AB} + K_{rot,C} &= \frac{1}{2}m_{CM}v_{CM}^2 + \frac{1}{2}k\Delta_i^2 + \frac{1}{2}m_{AB}(r_{AB}\dot{\phi}_{AB})^2 + \frac{1}{2}m_C(r_C\dot{\phi}_C)^2 \\ &= \frac{1}{2}(3m)\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}k(L_0 - L_0)^2 + \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{L_0}{3}\dot{\phi}|_{(L=L_0)}\right)^2 + \frac{1}{2}(m)\left(\frac{2L_0}{3}\dot{\phi}|_{(L=L_0)}\right)^2 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\dot{\phi}|_{L=L_0} = \frac{v_0 L_0}{2L_0^2} = \frac{v_0}{2L_0} \tag{34}$$

$$E_i = \frac{1}{6}mv_0^2 + 0 + \frac{1}{36}mv_0^2 + \frac{1}{18}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 \tag{35}$$

Ahora se hace el mismo análisis para la energía total final:

$$\begin{aligned} E_f = K_{CM} + U_{resorte} + K_{rot,AB} + K_{rot,C} &= \frac{1}{2}m_{CM}v_{CM}^2 + \frac{1}{2}k\Delta_i^2 + \frac{1}{2}m_{AB}(r_{AB}\dot{\phi}_{AB})^2 + \frac{1}{2}m_C(r_C\dot{\phi}_C)^2 \\ &= \frac{1}{2}(3m)\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}k(L_{max} - L_0)^2 + \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{L_{max}}{3}\dot{\phi}|_{(L=L_{max})}\right)^2 + \frac{1}{2}(m)\left(\frac{2L_{max}}{3}\dot{\phi}|_{(L=L_{max})}\right)^2 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\dot{\phi}|_{(L=L_{max})} = \frac{v_0 L_0}{2L_{max}^2} \tag{37}$$

$$E_f = \frac{1}{6}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(L_{max} - L_0)^2 + \frac{1}{36}mv_0^2\frac{L_0^2}{L_{max}^2} + \frac{1}{18}mv_0^2\frac{L_0^2}{L_{max}^2} = \frac{1}{6}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(L_{max} - L_0)^2 + \frac{1}{12}mv_0^2\frac{L_0^2}{L_{max}^2} \tag{38}$$

Finalmente, hacemos un balance $E_i = E_f$, y queda:

$$\frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{6}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(L_{max} - L_0)^2 + \frac{1}{12}mv_0^2\frac{L_0^2}{L_{max}^2} \tag{39}$$

$$\rightarrow \frac{1}{12}mv_0^2 - \frac{1}{12}mv_0^2\frac{L_0^2}{L_{max}^2} = \frac{1}{2}k(L_{max} - L_0)^2 \tag{40}$$

$$\frac{1}{6}mv_0^2\left(1 - \frac{L_0^2}{L_{max}^2}\right) = \frac{1}{2}k(L_{max} - L_0)^2 \tag{41}$$

$$\rightarrow \frac{mv_0^2}{6k} = \left(\frac{L_{max} - L_0}{L_{max} + L_0}\right) L_{max}^2 \tag{42}$$

Con lo cual encontramos una relación con la que podríamos eventualmente encontrar L_{max}, con esto bastaría para un control, no tiene mucho sentido seguir (se puede, pero quedan expresiones bastante feas).