Donde se le puso α a la posición horizontal inicial, cuestión que no es relevante porque no aporta al producto cruz.

El momentum angular final tiene dos contribuciones: la barra y la partícula al rebotar

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_f^{barra} &= \vec{R} \times \vec{P} + I_{cm}\vec{\omega} &(11)\\ \vec{\ell}_f^{part} &= \vec{r} \times \vec{p} &(12) \end{aligned}$$

Como se toma momentum angular con respecto al centro de masa solo hay componente rotacional. La barra girará en sentido horario según la figura por ende la velocidad angular es negativa. Así mismo $\vec{\ell}_f^{part} = \left(\beta\hat{i} + D\hat{j}\right) \times -Mv_f$. La cantidad$\beta$ denota la posición horizontal que tampoco juega. La ecuación de conservación de momentum angular queda como

$$-MVD = -\frac{mL^2}{12}\omega + Mv_f D \tag{13}$$

- **Conservación de energía**

  Como el choque es elástico, se conserva la energía.

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{Mv_f^2}{2} + \frac{mv_{cm}^2}{2} + \frac{mL^2}{12}\frac{1}{2}\omega^2 \tag{14}$$

Las ecuaciones (7), (13) y (14) definen un sistema de 3×3 cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)} &(15)\\ \omega &= \frac{12D}{L^2}\frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)} &(16)\\ v_f &= \frac{m}{M}\frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)} - V &(17) \end{aligned}$$

Con todas las velocidades conocidas, las energías cinéticas de rotación y traslación también lo son. La velocidad final de la partícula incidente también está entregada.

P3. **(a)** Para esta parte, nos paramos en un sistema de referencia coincidente con el centro del anillo y calculamos por definición. Ocuparemos coordenadas polares para el problema.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho\cos\theta\hat{i} + \rho\operatorname{sen}\theta\hat{j} &(18)\\ &= R\cos\theta\hat{i} + R\operatorname{sen}\theta\hat{j} &(19) \end{aligned}$$

Donde $\rho = R$ puesto que esta coordenada no variará, ya que la distribución de masa es a lo largo de un radio fijo. Además, el diferencial de masa corresponde a $dm = \lambda dl$ donde dl es un elemento infinitesimal de arco, es decir $dl = Rd\theta$, por lo que $dm = \frac{M}{2\pi R}Rd\theta = \frac{M}{2\pi}d\theta$. El tensor de inercia se calcula entonces como

$$I_{ij}^G = \int \left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right)\frac{M}{2\pi}d\theta \tag{20}$$

Como estamos tomando ejes principales, el tensor es diagonal. Calculamos elemento a elemento

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^{2\pi}\left(R^2 - R^2\cos^2\theta\right)\frac{M}{2\pi}d\theta &(21)\\ I_{22} &= \int_0^{2\pi}\left(R^2 - R^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\frac{M}{2\pi}d\theta &(22)\\ I_{33} &= \int_0^{2\pi} R^2\frac{M}{2\pi}d\theta &(23) \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Aplicamos el teorema de Steiner según el vector $\vec{R}_G = (0, d, 0)$ donde $d = R + d_{AB}$. El teorema dice

$$\begin{aligned} I^o_{ij} &= I^G_{ij} + M(R_G^2\delta_{ij} - R_{Gi}R_{Gj}) && (25)\\ I^o_{11} &= I^G_{11} + Md^2 && (26)\\ I^o_{22} &= I^G_{22} && (27)\\ I^o_{33} &= I^G_{33} + Md^2 && (28) \end{aligned}$$

Y se tiene el tensor pedido.

(b) Se pide el momentum angular con respecto al punto donde está pivoteado este sistema. Se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_A &= I_o\vec{\Omega} && (29)\\ &= \begin{pmatrix} I^o_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I^o_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I^o_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} && (30) \end{aligned}$$

Lo cual da el momentum angular pedido. Notar que el vector de velocidad angular debe ser expresado de forma coherente con las componentes del tensor de inercia.

(c) Para esto, es necesario expresar el vector unitario que pasa por el eje de rotación y emplear

$$I_{\hat{n}} = \hat{n}^T I_o \hat{n} \tag{31}$$

Eso puede ser obtenido fácilmente notando que si $\hat{n}$ es el vector untario de rotación, este se expresa como

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \tag{32}$$

Luego se tiene el resultado.