Auxiliar #1:

· EDO: $f(x, y(x), \dot y, \ddot y, \ldots, y^{(n)}) = 0$ + C.I (derivada)

↳ 1er orden: $\dot y = \alpha y \Rightarrow y(t) = Ae^{\alpha t}$

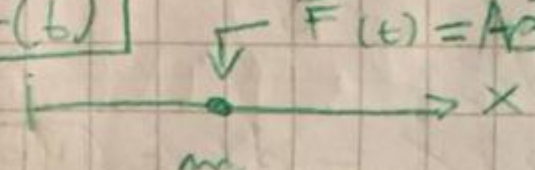
↳ 2do orden: $\ddot y = -\omega_0^2 y \Rightarrow y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

* truco: $\ddot x = \dot x \dfrac{d\dot x}{dx} = v \dfrac{dv}{dx}$ $\left(\dfrac{\ddot x}{\dot x} = \dfrac{\frac{d}{dt}\dot x}{\frac{d}{dt}x} \right)$ regla de la cadena

· Newton: $\boxed{\vec F_N = m\vec a = \dfrac{d\vec p}{dt} \xrightarrow{1D} \sum_{i=1}^{N} F_i = m\ddot x}$ (m = cte)

* Idea: dados F_i (o F_N), encontrar $x(t), \dot x(t)$ + C.I.

P1 $\boxed{F(t)}$ $\vec F(t) = Ae^{-nt}\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat x$



C.I $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot x(t=0) = v_0 \end{cases}$

$\Rightarrow F = Ae^{-nt}\,\mathrm{sen}(\omega t) = \ddot x m \rightarrow \ddot x = \dfrac{d\dot x}{dt} = \dfrac{A}{m} e^{-nt}\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{\dot x(t)} d\dot x = \frac{A}{m}\int_0^t e^{-nt}\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt$

$\Rightarrow \dfrac{m}{A}(\dot x(t) - v_0) = e^{-nt}\,\dfrac{\omega e^{nt} - n\,\mathrm{sen}(\omega t) - \omega\cos(\omega t)}{n^2 + \omega^2}$

$\Rightarrow \dot x(t) = v(t) = \cancel{\frac{A}{m}} v_0 + \ldots$ $\Big\}\ \dfrac{dx}{dt}$; $\underline{n = 0}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} dx = \cancel{\frac{A}{m}} v_0 t + \frac{A}{m}\int_0^t \frac{1}{\omega}(1 - \cos\omega t)\,dt$

$\Rightarrow x(t) - x_0 = v_0 t + \dfrac{A}{m\omega} t - \dfrac{A}{m\omega^2}\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \left(v_0 + \dfrac{A}{m\omega}\right)t - \dfrac{A}{m\omega^2}\,\mathrm{sen}(\omega t)}$

↳ El caso $n \neq 0$ se deja como ejercicio

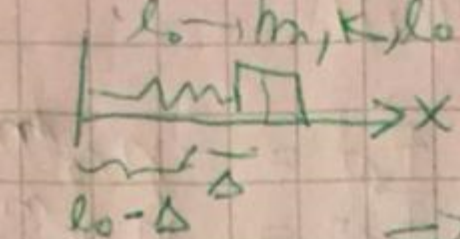
↳ Si $A \to 0$ o $m\omega \to \infty$ se recupera MRU:

$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t$, $v(t) = v_0$

CI.

Fecha:

B3]



$$\begin{cases} x(0) = l_0 - \Delta \ ; \ \cancel{x(0)} \ v(0) = ? \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F = -K(x - l_0) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{K}{m}(x - l_0) \ , \ \text{def: } \omega_0^2 = K/m$$

(EDO)

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 \Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

h] $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ / \ p(\lambda) \Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0$

$$\Rightarrow \tilde{x}_h(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \ / \ \mathrm{Re}[\ ]$$

$$\Rightarrow x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) = \tilde{A}\cos(\omega t + \tilde{\varphi})$$

p] $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 \Rightarrow x_p = l_0$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + l_0$$

*CI

$\hookrightarrow x(0) = l_0 - \Delta = A + l_0 \Rightarrow A = -\Delta$

$\hookrightarrow \dot{x}(0) = 0 = -A\omega_0\,\mathrm{sen}(\cancel{\omega_0 t}) + B\omega_0\cos(\cancel{\omega_0 t}) \Rightarrow \underline{B = 0}$

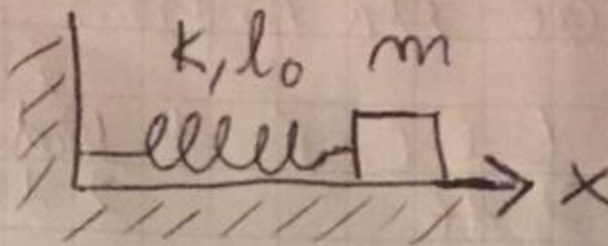
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\Delta\cos(\omega_0 t) + l_0}$$

además: $\ddot{x}(t) = \omega_0^2 \Delta \cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = \cancel{m}\frac{K}{\cancel{m}}\Delta\cos(\omega_0 t) = K\Delta\cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_N(t) = K\Delta\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)}$$

P2] *alternativa:*



La 2ª Ley de Newton nos dice que:

(1686)

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)} \Big\} \text{ Ley de Hooke (1660)}$$

En este caso: $\vec{a} = a\hat{\imath}$

$\vec{x} - \vec{x}_0 = (x - l_0)\hat{\imath}$; $\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto: $\left[\sum F_x = m a_x = m a = -k(x - l_0)\right]$

Sabemos de cinemática (Galileo, circa 1610) que:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \Big\} \text{ de modo que usaré } x, v, a.$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -k(x - l_0) \ \Big/ : m$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - l_0) \ \Big/ + \frac{k}{m}x \ ; \ \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 \Rightarrow \underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0}$$

Resolvamos la EDO multiplicando por $\dot{x} = v$:

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = \omega_0^2 l_0 \dot{x} \text{ , notemos que:}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot{x})^2\right] = \dot{x}\ddot{x} \ ; \ \frac{dx}{dt} = \dot{x} \ ; \ \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}x^2\right] = x\dot{x}$$

sigue →

De esta manera la ecuación queda:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\frac{d}{dt}(x^2) = \omega_0^2 l_0 \frac{d}{dt}x$$

Podemos juntar las derivadas (factorizar por $\frac{d}{dt}$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{\omega_0^2}{2}x^2 - \omega_0^2 l_0 x\right] = 0$$

Esto significa que hay una cantidad $\varepsilon = \text{cte}$ de modo que:

$$\left[\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} - \omega_0^2 l_0 x = \varepsilon\right] / \cdot m$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 - m\omega_0^2 l_0 x = \varepsilon m\right]$$

Con lo que $\varepsilon \equiv \frac{E}{m}$; con E la energía mecánica del sistema

↳ La energía es constante en caso de nula disipación.

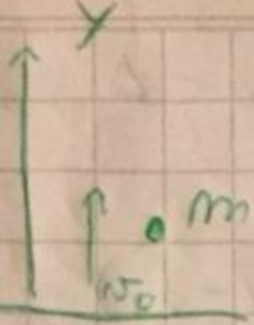
$$\left[E = \underbrace{\frac{1}{2} m\dot{x}^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2} - \underbrace{m\omega_0^2 l_0 x}_{\text{Energía centrífuga}}\right] \Big\} \int F_c\,dx ; \quad \underline{F_c = m\omega_0^2 l_0}$$

W_c

Energía cinética: $K = \frac{p^2}{2m}$; $p = mv$

Energía potencial elástica: $U_e = \frac{1}{2} m \left(\frac{k}{m}\right) x^2 = \frac{1}{2} k x^2 = -\int (-kx)\,dx$

P4] $\vec{g}\downarrow$



$\vec{F}_v = -\gamma \vec{v}\,\|\vec{v}\|^{n-1}$

↳ SUBIDA; $\vec{F}_v = -\gamma v^n \hat{y}$

↳ BAJADA; $\vec{F}_v = \gamma v^n \hat{y}$

$\vec{g} = -g\hat{y}$

S] $\sum F_y = m\ddot{y} = -mg - \gamma v^n$; $\frac{\gamma}{m} = b$

$\Rightarrow \ddot{y} = -g - bv^n$

B] $\sum F_y = m\ddot{y} = -mg + \gamma v^n$

$\Rightarrow \ddot{y} = -g + bv^n$

$n = 1$

(* $n=2$ → PAUTA)

En equilibrio, $\ddot{y} = 0 \Rightarrow v_\infty = \frac{g}{b} = \frac{mg}{\gamma}$

S] $\ddot{y} = \dot{v} = -g - bv = \frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow -\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g+bv} \Rightarrow -t = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{bv+g}{bv_0+g}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{bv+g}{bv_0+g}\right) = -bt \Rightarrow bv+g = e^{-bt}\cdot(bv_0+g)$

$\Rightarrow \left[\, v(t) = \frac{e^{-bt}}{b}(bv_0+g) - \frac{g}{b} \,\right]$

$\Rightarrow \left\{\, y(t) = -\frac{e^{-bt}}{b^2}(bv_0+g) - \frac{gt}{b} \,\right\}$

$v = 0 \Rightarrow g = e^{-bt}\left(bv_0 + g\right)$

$\Rightarrow e^{+bt} = \frac{bv_0+g}{g} \Rightarrow bt = \ln\left(\frac{bv_0+g}{g}\right)$

$\Rightarrow t^* = \frac{1}{b}\ln\left(1+\frac{bv_0}{g}\right)$ → llega y se detiene

B] $\frac{dv}{dt} = -g + bv \Rightarrow t = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{bv-g}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{bv-g}{-g}\right) = \ln\left(1-\frac{bv}{g}\right) = bt \Rightarrow e^{bt} = 1 - \frac{bv}{g}$

Ejercicio 1: Movimiento unidimensional
24 de marzo del 2017
Tiempo: 60 min

P1

Una partícula de masa m es lanzada verticalmente hacia arriba con rapidez inicial v_0 sometida a una fuerza de roce $||\vec{F}_{roce}|| = bv^2$ y a la gravedad de la Tierra. Considere que el eje Z se ubica de forma vertical y que el origen del sistema de coordenadas se encuentra en la superficie de la Tierra.

a) Determine la velocidad terminal v_∞ en función de m, g y b.

La velocidad terminal corresponde a la velocidad que alcanza un cuerpo en caída libre desde una altura suficientemente larga. En un principio el cuerpo es acelerado por la fuerza de gravedad, mientras el roce viscoso comienza a ascender lentamente, hasta que pasado cierto tiempo suficientemente largo la fuerza de roce es igual a la fuerza de gravedad, por tanto el cuerpo sigue cayendo pero a velocidad constante.

En el equilibrio se tendrá el siguiente equilibrio de fuerzas:

$$m\vec{a} = +bv_\infty^2\hat{k} - mg\hat{k} \tag{1}$$

Donde $\hat{k}$ es el vector unitario en la dirección de la gravedad, o sea ubicado de forma vertical hacia el centro de la Tierra. Dado que se alcanza una velocidad constante podemos decir que el miembro derecho de la ecuación 1 vale 0, y despejando la velocidad se tiene que:

$$v_\infty^2 = \frac{mg}{b} \rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}} \tag{2}$$

b) Encuentre la velocidad v en función de la posición z.

Ahora nos concentramos en el tramo transiente del problema, el cual debe ser separado en el ascenso y descenso, dado que el balance de fuerzas será diferente. En primer lugar revisaremos el ascenso:

- **Ascenso** El balance de fuerzas estará dado por el roce viscoso y la gravedad, similar a la ecuación 1 como sigue:

$$m\ddot{z}\hat{k} = -b\dot{z}^2\hat{k} - mg\hat{k} \rightarrow v = \dot{z} \rightarrow m\dot{v} = -bv^2 - mg \tag{3}$$

Ahora lo que resta es plantear la ecuación diferencial y resolverla aplicando la condición inicial $v(t=0) = v_0$, pero primero se usará la velocidad terminal para simplificar un poco la notación como sigue:

$$\frac{m}{b}\frac{dv}{dt} = -(v^2 + v_\infty^2) \rightarrow \frac{dv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{b}{m}dt \tag{4}$$

Como se pide v en función de z es necesario deshacerse de la variable t, para lo cual se hará uso de que $vdt = dz$, entonces multiplicando ambos miembros de la ecuación por v, queda:

$$\frac{vdv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{b}{m}dz \rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{v^2 + v_\infty^2} = \int_0^z -\frac{b}{m}dz \tag{5}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(ln(v^2+v_\infty^2))\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{b}{m}(z-0) \rightarrow ln\left(\frac{v^2+v_\infty^2}{v_0^2+v_\infty^2}\right) = -\frac{2b}{m}z \tag{6}$$

Despejando v se obtiene que:

$$v = \sqrt{(v_0^2+v_\infty^2)e^{-\frac{-2b}{m}z} - v_\infty^2} \tag{7}$$

Vemos que esta ecuación será solo válida cuando el miembro derecho de la resta sea mayor a v_∞^2, de lo contrario se indetermina la raíz cuadrada, esto sucederá cuando la velocidad se haga nula, por lo que se reafirma la necesidad de estudiar por separado el ascenso y descenso, ya que la ecuación 7 no puede explicar este último.

- **Descenso** Análogamente, se comienza con el balance de fuerzas:

$$m\ddot{z}\hat{k} = +b\dot{z}^2\hat{k} - mg\hat{k} \rightarrow v = \dot{z} \rightarrow m\dot{v} = +bv^2 - mg \tag{8}$$

Notar que la diferencia radica en el signo de la fuerza viscosa, esta debe ser positiva dado que ahora apunta siempre hacia arriba, dado que durante el descenso la velocidad siempre apunta hacia abajo y el roce debe ser contrario a esta. El procedimiento siguiente es idéntico al del caso del ascenso, salvo algunas diferencias en los signos y en los límites de integración. La condición inicial se considerará que en un tiempo t_m el cuerpo se encuentra detenido, o sea alcanzó su altura máxima h.

$$\frac{m}{b}\frac{dv}{dt} = v^2 - v_\infty^2 \rightarrow \frac{dv}{v^2-v_\infty^2} = \frac{b}{m}dt \tag{9}$$

$$\frac{vdv}{v^2-v_\infty^2} = \frac{b}{m}dz \rightarrow \int_0^v \frac{vdv}{v^2-v_\infty^2} = \int_h^z \frac{b}{m}dz \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}(ln(v^2-v_\infty^2)\Big|_0^v = -\frac{b}{m}(h-z) \rightarrow ln\left(\frac{v^2-v_\infty^2}{-v_\infty^2}\right) = -\frac{2b}{m}(h-z) \tag{11}$$

De la cual se puede despejar la velocidad durante su descenso:

$$v = v_\infty\sqrt{1-e^{-\frac{2b}{m}(h-z)}} \tag{12}$$

c) Determine la altura máxima h alcanzada.

Para determinar la altura máxima alcanzada se hará uso de la ecuación 6 imponiendo que $v=0$ y encontrando el z resultante al cual llamaremos h.

$$(6) \rightarrow ln\left(\frac{v_\infty^2}{v_0^2+v_\infty^2}\right) = -\frac{2b}{m}h \rightarrow h = \frac{m}{2b}ln\left(1+\frac{v_0^2}{v_\infty^2}\right) \tag{13}$$

d) Calcule la velocidad con que la partícula llega al suelo, v_f, demuestre que se cumple:

$$\frac{1}{{v_f}^2} = \frac{1}{{v_0}^2} + \frac{1}{{v_\infty}^2} \tag{14}$$

Ahora se utiliza la ecuación 11 para imponer que en $z=0$ la velocidad es v_f, la velocidad pedida, entonces:

$$ln\left(\frac{v_\infty^2-v_f^2}{v_\infty^2}\right) = -\frac{2b}{m}h \tag{15}$$

Comparando lo encontrado con lo desarrollado en la parte (c) (inicio ecuación (13)), podemos decir que:

$$ln\left(\frac{v_\infty^2 - v_f^2}{v_\infty^2}\right) = ln\left(\frac{v_\infty^2}{v_0^2 + v_\infty^2}\right) \tag{16}$$

Y reordenando llegamos a que:

$$\begin{aligned}
(v_\infty^2 - v_f^2)(v_0^2 + v_\infty^2) &= v_\infty^4 \\
v_0^2 v_\infty^2 + v_\infty^4 - v_f^2 v_0^2 - v_f^2 v_\infty^2 &= v_\infty^4 \\
v_0^2 v_\infty^2 &= v_f^2 v_0^2 + v_f^2 v_\infty^2 \\
\rightarrow \frac{1}{v_f^2} &= \frac{1}{v_\infty^2} + \frac{1}{v_0^2}
\end{aligned} \tag{17}$$