Capítulo 9

Ecuaciones de Euler-Lagrange

9.1. Principio de Hamilton

Este principio establece, en forma muy general, que la evolución de un sistema físico se determina por medio de un *principio variacional*, el cual se basa en una función—*el lagrangeano*—apropiada a cada sistema. Esta función L contiene información sobre las variables del sistema y las fuerzas que actúan sobre él.

Para ser descrito, un sistema de N partículas que evoluciona tridimensionalmente se necesita en principio un conjunto de $3N$ coordenadas $x_{ai}(t)$, con $a = 1,2,\dots N$ y $i = 1,2,3$. Sin embargo se puede requerir menos. Por ejemplo, en el caso de un péndulo de largo R, se tiene $N = 1$, se necesita sólo los ángulos esféricos $\theta(t)$ y $\phi(t)$. Aunque el movimiento es tridimensional, esto es, hay tres coordenadas (x,y,z), existe una condición

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-R=0 \tag{9.1.1}$$

que reduce el número de coordenadas necesarias de tres a dos.

En lo que sigue se quiere describir un sistema de N partículas puntuales para las cuales se necesita, en lugar de las $3N$ coordenadas x_{ai}, tan solo de n coordenadas q_s. A estas últimas se las llama *coordenadas generalizadas* y n es lo que se denomina *número de grados de libertad* del sistema. Así, en el caso del péndulo de más arriba, existen solo dos coordenadas generalizada que normalmente se escoge que sean $q_1(t) = \phi(t)$ y $q_2(t) = \theta(t)$. Hay, entonces, dos grado de libertad.

Por lo dicho, la evolución de un sistema de N partículas se describe por un conjunto de n coordenadas generalizadas $q_s(t)$ con $s = 1, 2, \ldots n$, con $n \leq 3N$. Suele denotarse $\vec{q}(t)$ al conjunto ordenado $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$,

$$\vec{q}(t) \equiv (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \tag{9.1.2}$$

El principio de Hamilton establece que la evolución dinámica—de un sistema con n coordenadas generalizadas—entre el estado inicial $\vec{q}_I(t_1)$ y el estado final $\vec{q}_F(t_2)$ corresponde a un extremo (mínimo, máximo o punto estacionario) del *funcional de acción* $S[\vec{q}]$. La condición de extremo se expresa matemáticamente en la forma

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{q}(t)} = 0 \tag{9.1.3}$$

que, en más detalle, significa que se deben satisfacer las n condiciones

$$\frac{\delta S}{\delta q_1(t)} = 0, \qquad \frac{\delta S}{\delta q_2(t)} = 0, \qquad \ldots \qquad \frac{\delta S}{\delta q_n(t)} = 0.$$

Genéricamente se define el funcional de acción por medio de la integral

$$S[\vec{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\, dt \tag{9.1.4}$$

de la función $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(t), t)$, llamada *lagrangeano*.

Más adelante se verá la forma de construir la función $L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$ asociada al sistema que se desee estudiar. Por el momento baste decir que interesa saber para qué $\vec{q}(t)$ específico el funcional de acción $S[\vec{q}]$ es extremo. Ese $\vec{q}(t)$ particular es "la trayectoria" del sistema en el tiempo.

A continuación veremos las condiciones que debe cumplir el lagrangeano L para que la integral de acción S sea extrema y se adelanta que tales condiciones se denominan *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

Sea $\vec{q}(t)$ la solución que se busca, es decir, $S[\vec{q}]$ es un valor extremo. Usemos como argumento en (9.1.4) un $\vec{q}\,'(t) \equiv \vec{q}(t) + \vec{\varepsilon}(t)$ donde $\vec{\varepsilon}(t)$ es una pequeña perturbación que se anula en los extremos:

$$\vec{\varepsilon}(t_1) = \vec{\varepsilon}(t_2) = 0 \tag{9.1.5}$$

A continuación se usa $\delta S \equiv S[\vec{q}+\vec{\varepsilon}] - S[\vec{q}]$ que, en más detalle, se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(L(\vec{q}+\vec{\varepsilon},\ \dot{\vec{q}}+\dot{\vec{\varepsilon}},\ t) - L(\vec{q},\ \dot{\vec{q}},\ t) \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) dt + O(\vec{\varepsilon}^2)
\end{aligned} \tag{9.1.6}$$

Como se indica, se ha hecho una expansión hasta primer orden en $\vec{\varepsilon} \equiv \delta\vec{q}$.

Pero, puesto que

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right] = \dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} + \vec{\varepsilon}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right],$$

el último término en el integrando que aparece en (9.1.6) puede ser reemplazado por una derivada total y otro término. La integral del término con la derivada total $\frac{d}{dt}\left[\vec{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\varepsilon}}}\right]$ puede calcularse trivialmente y es cero debido a (9.1.5), por lo que se concluye que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}\cdot\left[\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right] dt \tag{9.1.7}$$

El principio de Hamilton consiste en exigir que δS sea cero para cualquier perturbación $\vec{\varepsilon}(t)$ que cumpla (9.1.5), esto es, se exige que $\vec{q}(t)$ sea un punto estacionario de la integral de acción S, lo que sólo se satisface si

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0 \tag{9.1.8}$$

Las anteriores son las ecuaciones de Euler-Lagrange En forma más básica se escribe una ecuación por cada valor del índice s.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial q_s}, \qquad \text{con} \qquad s = 1, 2, \ldots n \tag{9.1.9}$$

En la ecuación (9.1.7) los $\varepsilon_s(t)$ son los $\delta q_s(t)$

Pequeño ejemplo:

Tómese el caso de la clase de funciones $q(t)$ continuas y diferenciales tales que $q(a) = c$ y $q(b) = d$. Se plantea encontrar la función $q(t)$ particular de esta clase, tal que el funcional $S(q)$ que describe el largo—en el plano (q,t)—desde el punto (a,c) hasta (b,d) sea mínimo. En un arco infinitesimal el arco es la hipotenusa del triángulo con cateto paralelo al eje $X = t$ de largo dt y cateto paralelo al eje $Y = q$ da largo $\dot{q}(t)\,dt$, esto es

$$S(q) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{q}^2(t)}\; dt$$

esto es, $L = \sqrt{1+\dot{q}^2(t)}$, por lo que $\partial L/\partial q = 0$ mientras que $\partial L/\partial \dot{q} = \dot{q}/\sqrt{1+\dot{q}^2(t)}$ por lo que la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a $\frac{d}{dt}\dot{q} = 0$, esto es, el largo total se minimiza cuando $\dot{q}$ es constante lo que, da

$$q(t) = \frac{ad - bc + (c-d)\,t}{a-b}$$

cuando se impone las condiciones de los extremos.

9.2. Lagrangeano para las ecuaciones de Newton

Para un sistema 3D de N partículas el lagrangeano para las ecuaciones de Newton es de la forma

$$L = K - U \tag{9.2.1}$$

donde

$$K(\dot{\vec{r}}_a) = \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a, \qquad \text{y} \qquad U = U(\vec{r}_a) \tag{9.2.2}$$

y los $\vec{r}_a$ en principio representan $3N$ coordenadas cartesianas reales. Los términos de (9.1.9) separadamente resultan ser

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\vec{r}}_a} = m_a \ddot{\vec{r}}_a \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$$

y las ecuaciones (9.1.8) implican las ecuaciones de Newton

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \tag{9.2.3}$$

Pero si existen restricciones de la forma

$$f_\beta(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_{3N}) = 0, \qquad \beta = 1,\ldots 3N-n \tag{9.2.4}$$

se debe cuidar de resolver las ecuaciones respetando tales restricciones. En este caso el sistema tiene solo n variables dinámicas independientes: Hay $3N$ variables y sobre ellas hay $3N-n$ condiciones (9.2.4), entonces hay tan solo n grados de libertad.

Formalmente lo que suele hacerse es incorporar $3N-n$ nuevas variables λ_β con lo cual

$$L = K - U + \sum_\beta \lambda_\beta\, f_\beta \tag{9.2.5}$$

Puesto que no hay términos $\dot{\lambda}_\beta$ las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a los λ_β son mismas las condiciones (9.2.4).

Se supondrá que estas restricciones son tales que pueden expresarse en la forma

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1,\ldots,q_n;t) \tag{9.2.6}$$

Tales restricciones se denominan *holonómicas*.

A menudo es mucho más conveniente plantear un nuevo Lagrangeano que surge del L original eliminando las variables originales $\vec{r}_a$ en favor de las variables q_s con lo cual se obtiene un Lagrangeano

$$L(\vec{q},\,\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\mu_n(\vec{q})\,\dot{q}_s^2 - U(\vec{q}) \tag{9.2.7}$$

sin restricciones. Las ecuaciones ahora son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial q_s} \tag{9.2.8}$$

En esta formulación, el término que aparece a la derecha se denomina la “fuerza generalizada”.

Ejemplo: El caso del péndulo plano plano se plantea originalmente con $K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$ y la energía potencial es $U = -mgy$ y la restricción $x^2+y^2 = R^2$, esto es

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+mgy, \qquad \text{con la restricción} \qquad x^2+y^2 = R^2 \tag{9.2.9}$$

Sin embargo resulta mejor hacer el reemplazo $x = R\sin q$, $y = R\cos q$, con lo que se garantiza que la restricción se satisface y se tiene

$$L = \frac{m}{2}R^2\dot{q}^2 - mgR\cos q \tag{9.2.10}$$

la ecuación única ecuación de Euler-Lagrange es

$$mR^2\ddot{q} = -mgR\sin q \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = -\frac{g}{R}\sin q. \tag{9.2.11}$$

Obsérvese que la fuerza generalizada en este ejemplo es

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial}{\partial q}(-mgR\cos q) = -mgR\sin q$$

que no tiene dimensiones de fuerza. La razón es que q no tiene dimensiones de longitud.

Una forma sencilla de obtener las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido consiste en obtener primero su energía cinética y potencial y luego haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

9.3. Caso sencillo con cuerpo rígido

El movimiento de un cuerpo rígido, ya descrito en el capítulo 8, tiene a lo más seis grados de libertad: tres se refieren a traslación y pueden estar indicados por el movimiento del centro de masa, esto es, por descrito por $\vec{R}_G$ y otros tres que pueden asociarse a la velocidad angular instantánea $\vec{\Omega}$ del cuerpo. Pero en los casos en que el cuerpo tiene un punto fijo a un sistema inercial no hay dinámica de traslación no trivial y tan solo interesa estudiar la rotación del cuerpo.

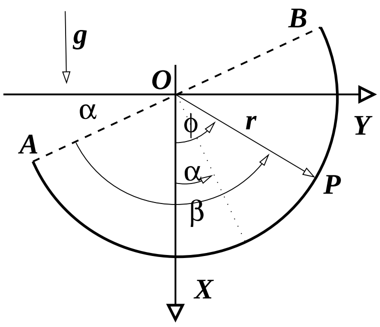

Figura 9.1: *Alambre semicircunferencial que oscila debido a su propio peso.*

Consideremos el caso ya visto en §2.3.3.2. de un alambre semicircunferencial que puede oscilar en torno a su centro de curvatura. Para obtener la energía cinética se ve que la velocidad tangencial de cualquier elemento de masa dm es $v = R\dot{\alpha}$, mientras que $dm = \frac{M}{\pi} d\phi$, de modo que

$$K = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2+\alpha} (R\dot{\alpha})^2 \, \frac{M}{\pi} d\phi = \frac{MR^2}{2}\dot{\alpha}^2$$

mientras que

$$U = g\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2+\alpha} R\cos\phi \frac{M}{\pi} d\phi = \frac{2MgR}{\pi}\cos\alpha$$

esto es,

$$L = \frac{MR^2}{2}\dot{\alpha}^2 - \frac{2MgR}{\pi}\cos\alpha$$

Se puede ver que la ecuación de Euler-Lagrange en este caso es (2.3.37).

9.4. Problemas

10.1 Se tiene una polea (que se modela aquí como una rueda ideal sin masa ni roces con eje horizontal fijo) en cuyo perímetro se apoya un hilo. En los extremos del hilo cuelgan sendas partículas de masas m_1 y m_2. Determine el lagrangeano L del sistema teniendo como datos las dos masas y la aceleración de gravedad, obtenga las ecuaciones de movimiento y la aceleración con que cae la masa mayor.

10.2 Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange de un péndulo esférico.

10.3 Ecuaciones para el péndulo doble plano: una partícula de masa m_1 pende de un hilo de largo R_1. El otro extremo de este hilo está fijo a un punto P. De la partícula nace otro hilo de largo R_2 en cuyo extremo hay una partícula de masa m_2. Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange en el caso en que el movimiento ocurre en un plano fijo.

10.4 Escriba el lagrangeano de un sistema vertical suelo-resorte (k_1, d_1)-partícula (m_1)-resorte (k_2, d_2)- partícula (m_2) en presencia de gravedad.

10.5 Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange de un cilidro de radio R, largo h que rueda sin deslizar por un plano inclinado (ángulo α).