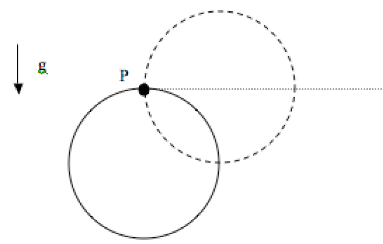
Auxiliar 3 - Solido Rigido - Energía Cinética de Rotación

Profesor: Rodrigo Vicencio
Auxiliares: Lucciano Letelier C. [Lucciano98@gmail.com]
Luna Alarcón M. [lunalarconmerino@gmail.com]
Pamela Rodriguez S. [p.rodriguezsantelices@gmail.com]

P1. Un disco uniforme de masa M y radio R puede girar libremente en torno a un eje sin fricción que pasa por un punto en su borde P. Inicialmente el disco está con su centro de masa en su posición más baja y se le golpea de forma que su CM adquiere instantáneamente una rapidez v_0. Determine el valor de v_0 para el centro del disco alcance el nivel horizontal en línea con el eje de rotación. Recuerde que el momento de inercia de un disco respecto a un eje que pasa por su centro de masa es $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$.



Solucion:

La primera noción de este problema se resuelve a traves de energía pero como no es una particula puntual, no se puede simplemente solucionar con energía cinetica $E_k = \frac{MV^2}{2}$ ya que cada parte del circulo se mueve a la misma rapidez angular, pero a distinta rapidez tangencial, por lo cual usaremos la Energía cinetica rotacional $E_\omega = \frac{I\omega^2}{2}$, para eso necesitamos conocer el momento de inercia del objeto y su velocidad angular.

Respecto a su velocidad angular inicial, se nos dice que su CM (Centro de Masa) se mueve con rapidez v_o luego del choque, sabemos que su CM esta a R del Pivote por lo cual podemos decir que la rapidez angular inicial ω_o es $\frac{v_o}{R}$.

Ahora para el calcular su momento de inercia usaremos la información del momento de inercia del disco dada en el enunciado y el teorema de Steiner, el cual nos dice que el momento de inercia de un objeto es la inercia que tendria respecto a su centro de masa más el producto entre la masa y la distacia del pivote al CM ($I = I_{CM} + Md^2$).

luego de saber que hacer, procedemos a calcular el momento de inercia del disco respecto a un extremo, lo cual nos dice que d=R

$$I = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

ahora con I conocido simplemente hacemos conservación de energía, por lo que calculamos la energia en el inicio y justo cuando llegue al eje x con rapidez 0.(asumimos que su centro de masa parte en h=0 y termina en h=R)

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{3MR^2}{2}\frac{v_o^2}{R^2} + Mg0$$

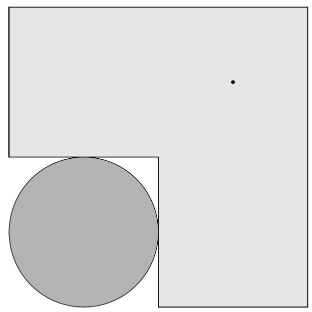
$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{3MR^2}{2}\frac{0^2}{R^2} + MgR$$

al despejar v_o de la ecuación $E_1 = E_2$ no da como resultado:

$$v_o = 2\sqrt{\frac{gR}{3}}$$

la cual es la rapidez minima para que el CM del disco llegue a el eje x

P2. A una placa cuadrada uniforme, de masa $4M$ y largo L, se le ha retirado un trozo cuadrado de largo $\frac{1}{2}L$, y luego se le ha unido una circunferencia de radio $\frac{1}{4}L$ y masa $2M$. Determine el momento de inercia, con respecto a un eje que atraviesa el punto que se indica en la figura.



Lo primero que hay que saber es que la Inercia de un sistema de cuerpos es la sumatoria de inercias. Como esta es una figura irregular lo mejor es descomponer el problema en casos conocidos, en esta situación se puede descomponer en en 3 cuadrados y 1 disco. como el cuadrado original era de masa 4M y si lo dividimos en 4 trozos cada parte tendra una masa de M, procedemos a calcular con Steiner la inercia de los tres cuadrados y el disco.

Llamaremos I_1 al momento de inercia del cuadrado en el pivote, I_2 al que esta en la parte superior izquierda e I_3 al que esta en la parte inferior derecha.

Cada cuadrado tiene lados de largo $\frac{L}{2}$

El momento de inercia de una tabla de largo a y ancho b respecto a su CM, es $I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$

procedemos a calcular los momentos de inercia:

para el primer cuadrado:
como el cuadrado 1 tiene el pivote justo en su CM el "desplazamiento"de la Inercia es 0.

$$I_1 = \frac{M}{12}((\frac{L}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2) + M0^2 = \frac{ML^2}{24}$$

para el segundo cuadrado:
será el momento de inercia I_1 pero hay que aplicar Steiner ya que su CM esta desplazado $\frac{L}{2}$

$$I_2 = I_1 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{7}{24}ML^2$$

para el tercer cuadrado:
nos fijamos que al igual que el segundo cuadrado su CM está desplazado $\frac{L}{2}$ por lo que al aplicar Steiner sabremos que $I_2 = I_3$

para el disco:
simplemente es aplicar Steiner, pero para encontrar d^2 desde el CM ,usando pitagoras quedando $d^2 = \frac{L^2}{2}$ ahora aplicamos Steiner:

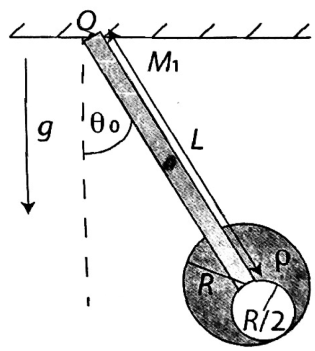
$$I_4 = \frac{2M}{2}(\frac{L}{4})^2 + 2M\frac{L^2}{2} = \frac{17}{16}ML^2$$

Finalmente lo unico que queda es sumar todos los momentos de inercia.

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{27}{16}ML^2$$

P3. La figura muestra una barra M_1 y longitud L que puede rotar sin roce con respecto a su extremo O. Del otro extremo se sujeta un disco de radio R al que le falta un agujero de radio $\frac{R}{2}$. La densidad de masa del disco es uniforme, ρ. El sistema se suelta desde el reposo con la barra formando un ángulo θ_0 con respecto a la vertical, y cae por efecto de la gravedad.

a. Determine el momento de inercia del sistema con respecto al punto de rotación.
b. Determine la velocidad con que pasa el centro del disco vertical.



Solucion:
a. La forma más conveniente de abordar este problema, es dividir el sistema en 3 cuerpos, La barra, el disco imaginando que esta completo, y el agujero (suponiendo que es un disco con masa negativa), basicamente lo que hacemos es sumarle la masa faltante y luego restarsela, a esto se le llama principio de superposición y se aplica en varias ramas de la Fisica.

A la barra la denotaremos por 1, y su momento de inercia es conocido cuando tiene un pivote en su extremo $I_1 = \frac{1}{3}ML^2$.

al disco sin agujero será denotado 2, supongamos que tiene una masa M_D que despues encontraremos,la inercia la calcularemos por Steiner:

$$I_2 = \frac{1}{2}M_D R^2 + M_D L^2 = M_D \frac{R^2 + 2L^2}{2}$$

como sabemos la densidad superficial que es p_o ,entonces $M_D = \pi R^2 p_o$ remplazando nos queda:

$$I_2 = \pi R^2 p_o \frac{R^2 + 2L^2}{2}$$

al agujero lo denotaremos como 3, ahora suponemos que tendra una densidad $-p_o$, su masa será, $M_o = -p_o\pi(\frac{R}{2})^2$, entonces su momento de inercia será:

$$I_3 = \frac{1}{2}M_o(\frac{R}{2})^2 + M_o(L + \frac{R}{2})^2 = M_o\frac{(R^2 + 2(L + \frac{R}{2})^2)}{2} = -p_o\pi(\frac{R}{2})^2\frac{(R^2 + 2(L + \frac{R}{2})^2)}{2}$$

$$I_3 = -p_o\pi R^2\frac{(R^2 + 2(L + \frac{R}{2})^2)}{8}$$

al sumar todas las inercias:

$$I_{total} = \frac{1}{3}ML^2 + \pi R^2 p_o\frac{3R^2 + 8L^2 - 2(L + \frac{R}{2})^2}{8}$$

b. Para encontrar la viáelocidad con la que atraviesa el eje y debemos hacer conservación de Energía, asumiendo conocido la posición del centro de masa (d)

$$E_1 = Mgd(1 - \cos\theta)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}I\omega_{max}$$

igualando $E_1 = E_2$

$$\omega_{max} = 2\frac{Mgd}{I_{total}}(1 - \cos\theta)$$

entonces la rapidez en ese punto será:

$$\omega_{max}d = v_{max} = 2\frac{Mgd^2}{I_{total}}(1 - \cos\theta)$$

Ahora encontraremos d: Al reemplazar las masas y posiciones de los centros de masa de 3 objetos quedando:

$$d_{CM} = \frac{4ML + \pi R^3 p_o + 6\pi R^2 p_o L}{8M + 6\pi R^2 p_o}$$

con eso tenemos todos los datos de:

$$v_{max} = 2\frac{Mgd^2}{I_{total}}(1 - \cos\theta)$$