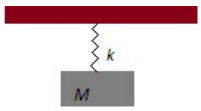
Auxiliar 6 - Oscilaciones Amortiguadas y Forzadas

Profesor: Rodrigo Vicencio
Auxiliares: Lucciano Letelier C. [Lucciano98@gmail.com]
Luna Alarcón M. [lunalarconmerino@gmail.com]
Pamela Rodriguez S. [p.rodriguezsantelices@gmail.com]

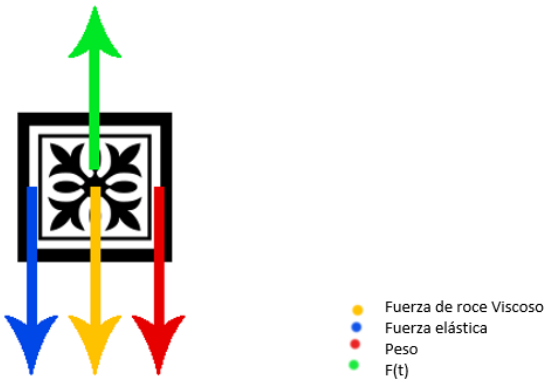
P1. Una masa M oscila colgada de un resorte de constante k .La constante de amortiguamiento es b. El sistema es forzado por una fuerza sinusoidal de amplitud F_o y con frecuencia angular ω.

a) Encuentre la ecuación de movimiento.

b) Deje expresado la solucion y(t).



a) Primero hacemos el DCL, en este caso elegimos el caso cuando va subiendo, y el largo del resorte es menor al largo natural,



1.png

Luego implantamos la segunda ley de Newton

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

Entonces la sumatoria de fuerzas será

$$M\ddot{y} = F(t) - Mg - Fr - Fe$$

Tambien sabemos que la fuerza $F(t)$ es una fuerza sinusoidal de amplitud F_0

$$F(t) = F_0 sin(\omega t)$$

$$Fr = b\dot{y}$$

$$Fe = k((lo + y) - lo) = ky$$

La EDO del movimiento queda como:

$$\ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g = \frac{F_0}{M}sin(\omega t)$$

pero queda un termino g cte en el lado izquierdo por lo que hacemos un cambio de variable para eliminar el termino g:

$$z = y - \frac{M}{k}g$$

$$\dot{z} = \dot{y}$$

$$\ddot{z} = \ddot{y}$$

reemplazando en la EDO:

$$\ddot{z} + \frac{b}{M}\dot{z} + \frac{k}{M}z = \frac{F_0}{M}sin(\omega t)$$

b) sabemos que la solución de una oscilacion forzada es:

$$z(t) = Ae^{-t/2\tau}cos(\Omega t + \phi) + \frac{F_0}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}sin(\omega t - \delta)$$

pero

$$z(t) = y(t) + \frac{M}{k}g$$

por lo tanto la solucion para $y(t)$ es:

$$y(t) = Ae^{-t/2\tau}cos(\Omega t + \phi) + \frac{F_0}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}sin(\omega t - \delta) - \frac{M}{k}g$$

donde:

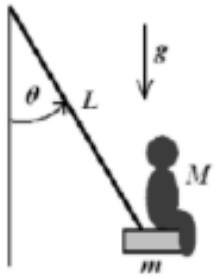
$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{M}$$

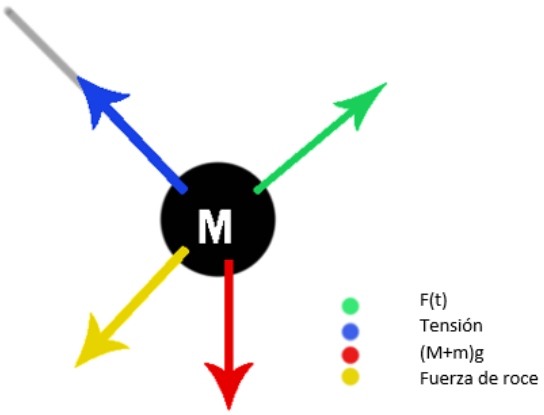
$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$$

$$\delta = arctg(\frac{b\omega}{M(\omega_0^2 - \omega^2)})$$

P2. Un niño de masa M está sentado en un columpio de masa m y de largo L. El coeficiente de roce viscoso del columpio y el niño con el aire es b.Si el columpio se empuja con una fuerza $F = F_o \sin \omega t$ en la dirección tangencial al movimiento del columpio, se pide detallar:



a) La ecuación de movimiento del columpio. Hacemos el DCL para cuando va subiendo.



tenemos las siguientes relaciones:

$$\sum \tau = I_t \alpha$$

$$\vec{R} = -L\hat{y}$$

$$\vec{Fr} = -b\dot{x}\hat{x}$$

$$\vec{T} = T\hat{y}$$

$$\vec{F(t)} = F_0 sin(\omega t)$$

$$(M+m)\vec{g} = (M+m)g(-cos(\theta)\hat{y} - sen(\theta)\hat{x})$$

entonces la sumatoria de torques será

$$\sum \tau = \vec{R}X\vec{T} + \vec{R}X\vec{Fr} + \vec{R}XF\vec{(t)} + \vec{R}X(M+m)\vec{g} = I\alpha$$

consideramos el sistema como una particula puntual:

$$I = MR^2 = (M+m)L^2$$

decimos que:

$$\dot{x} = \dot{\theta}L$$

por lo que obtenemos la siguiente ecuación:

$$-b\dot{\theta}L^2 + F(t)L - (M+m)gsen(\theta)L = (M+m)L^2\ddot{\theta}$$

pero:

$$sen(\theta) \approx \theta$$

por lo cual:

$$-b\dot{\theta}L + F(t) - (M+m)g\theta = (M+m)L^2\ddot{\theta}$$

y la EDO normalizada es:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{M+m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = \frac{F_0}{(M+m)L}sen\omega t$$

b) El periodo de pequeñas oscilaciones.
Sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ por lo que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ pero en la solución sabemos que:

$$\theta(t) = Ae^{\frac{-t}{\tau}}cos(\Omega t + \phi) + \text{Corcho del forzante.}$$

podemos darnos cuenta que:

$$\Omega \neq \omega_0$$

pero si se cumple que:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{b^2}{4(M+m)^2}}$$

por lo tanto el periodo para pequeñas oscilaciones es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} - \frac{b^2}{4(M+m)^2}}}$$

c) La frecuencia de resonancia del columpio.
La frecuencia de resonancia es la frecuencia necesaria para que la solución se vaya a infinito, en este caso:

$$Ae^{-t/2\tau}cos(\Omega t+\phi)+\frac{F_0}{M\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\frac{\omega}{\tau})^2}}sin(\omega t-\delta)$$

donde lo unico que puede hacer que explote la solución es que:

$$D(\omega)=(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\frac{\omega}{\tau})^2\to 0$$

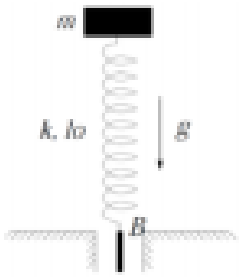
como esta función es siempre positiva si calculamos el minimo derivando respecto a ω e iguobtendremos la frecuencia de resonancia.

$$\frac{dD}{d\omega}=0$$

con lo que obtenemos:

$$\omega=\omega_0^2-\frac{1}{2\tau^2}$$

P3. Considere una partcula de masa m que esta apoyada sobre un resorte de constante k y largo natural l_o, bajo la accion de gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t=0$ al nivel de la mesa.



a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa.
en t=0 el sistema está en reposo

$$\sum F=0$$

como solo nos importa solo la altura observamos las fuerzas en y:

$$-k(y-lo)-mg=0$$

obteniendo

$$y = lo - \frac{mg}{k}$$

la cual es la altura de equilibrio.

b) En $t = 0$, cuando la masa esta quieta y en la posicion de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $r_B(t) = A_0 sin(\omega t)$. Encuentre la ecuacion que describe el movimiento de la masa.

la barra empieza a moverse con $\vec{r_b} = A_0 sin(\omega t)\hat{y}$ entonces:

$$\Delta y(t) = y(t) - \vec{r_b} - lo$$

entonces ahora la sumatoria de fuerzas en y queda como:

$$\sum F_y = -k\Delta y(t) - mg = k(lo - y(t) + A_0 sin(\omega t)) - mg = m\ddot{y}$$

con lo que la Ecuación de movimiento nos queda:

$$\ddot{y(t)} + \frac{k}{m}y(t) - \frac{klo}{m} + g = \frac{kA_0}{m}sin(\omega t)$$

pero hay una cte que molesta, entonces hacemos cambio de variable:

$$y(t) = z(t) - \frac{m}{k}g + lo$$

$$\dot{y(t)} = \dot{z(t)}$$
$$\ddot{y(t)} = \ddot{z(t)}$$

por los que la edo nos queda:

$$\ddot{z(t)} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{kA_0}{m}sin(\omega t)$$

c) Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas si no hay amortiguamiento:

$$\Omega = \omega_0$$

$$\tau \to \infty$$

entonces z(t) queda como:

$$z(t) = Acos(\omega_0 t + \phi) + \frac{kA_0}{m(\omega_0^2 + \omega^2)} sin(\omega t)$$

en t=0:

$$y(0) = lo - \frac{mg}{k}$$

por lo tanto:

$$z(0) = 0$$

buscamos el valor de ϕ

$$z(0) = Acos(\phi) = 0$$

por lo tanto $\phi = \frac{\pi}{2}$

ahora notemos que $\frac{kA_0}{m} = A_0\omega_0^2$ luego $\dot{z}(0) = 0$

$$\dot{z}(t) = -Asin(\omega_0 t + \frac{pi}{2})\omega_0 + \frac{A_0\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} cos(\omega t)\omega$$

$$\dot{z}(0) = -A + \frac{A_0\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\omega = 0$$

quedandonos la amplitud como:

$$A = \frac{A_0\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\omega$$

ahora devolviendo el cambio de variable a y(t) y aplicando los valores de A y ϕ, nos queda:

$$y(t) = \frac{A_0\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}[\omega cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \omega_0 sin(\omega t)] + lo - \frac{m}{k}g$$