7. Oscilaciones

CONTENIDO:

Planteamiento :

Esta lección analiza el movimiento oscilatorio de partículas y sólidos, lo que constituye un buen ejercicio para afianzar los conceptos de la Mecánica antes estudiados.

Comenzamos describiendo el movimiento armónico simple, resaltando su importancia como modelo que permite describir las pequeñas oscilaciones de un cuerpo alrededor de su posición de equilibrio. Como aplicación, se analiza entonces el caso de una masa unida a un muelle, y los péndulos simple, físico y de torsión. Se demuestra entonces que las fuerzas asociadas a un movimiento armónico simple son conservativas y, por tanto, es posible definir una energía potencial elástica. El último apartado se dedica al estudio de osciladores amortiguados y forzados, resaltando los fenómenos de resonancia de estos últimos.

El alumno debe saber:

a) Toda partícula sometida a una fuerza (o momento de fuerzas) proporcional y de signo contrario al desplazamiento describe un m.a.s.

b) Aplicar lo anterior para identificar cuándo un sistema está sometido a un movimiento armónico simple

c) Describir las características del movimiento armónico simple

d) Definir las propiedades básicas de osciladores amortiguados y forzados: coeficiente de amortiguamiento, decremento logarítmico, constante de tiempo, factor de calidad, resonancia.

e) Resolver dinámicamente y por métodos energéticos problemas que puedan ser descritos como un m.a.s.

<u>*Bibliografía:*</u>

Teoría:

[1] Burbano S., Burbano E., Gracia C., *Física General*, (Ed. Mira 1993)

[2] Tipler P.A., *Física* (2 Vols.), 3ª Edic. (Reverté 1995)

[3] Sears F.W.; Zemansky M.W.; Young H.D., Freedman, R.A. *Física Universitaria*, (2 vols.), 9ª Edic. (Addison Wesley 1998)

[4] Resnick R., Halliday D., Krane K.S., *Física* (2 vols.), 4ª Edic. (CECSA 1997)

Problemas:

[1] Burbano S., Burbano E., Gracia C., *Problemas de Física*, (Ed. Mira 1993)

[2] García Roger J., *Problemas de Física* (2 Vols.), 4ª Edic., (Edunsa, 1992)

[3] González, F. *La Física en problemas*, Ed. Tebar Flores

[4] de Juana J.M., Herrero M.A., *Mecánica. Problemas de exámenes resueltos* (Paraninfo 1993)

RESUMEN TEORICO

7.1 Movimiento armónico simple

7.1.1 Movimiento oscilatorio

Existen muchas situaciones en las que una partícula cuenta con una posición en la que se encuentra en equilibrio estable. Por ejemplo, un péndulo en posición vertical, una masa unida a muelle horizontal no estirado, etc. Los átomos de un sólido también se encuentran situados sobre ciertas posiciones de equilibrio.

Al separar la partícula de su posición de equilibrio, suele ocurrir que ésta adquiere un movimiento de vaivén en torno a dicha posición, es decir, un movimiento que se repite a sí mismo una y otra vez. Este movimiento se denomina *movimiento oscilatorio* (o vibratorio) y es uno de los más frecuentes en la Naturaleza.

7.1.2 Movimiento armónico simple

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el movimiento armónico simple (MAS), que constituye una buena aproximación de muchas oscilaciones observadas en la Naturaleza.

Por definición, diremos que una partícula tiene un *movimiento armónico simple* si está sometida a una fuerza F proporcional al desplazamiento x y opuesta a él:

$$\boxed{F = -kx} \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Puesto que $F = ma$, el movimiento armónico simple también puede definirse como aquel caracterizado por una aceleración de la forma:

$$a = -(k/m)x = -Cx \tag{2}$$

La definición de movimiento armónico simple también puede extenderse a movimientos angulares. En ese caso, la definición de movimiento armónico simple es

$$\tau = -k\varphi, \qquad \text{o bien} \qquad \alpha = -C\varphi.$$

siendo τ el momento de fuerzas, α la aceleración angular, y φ el desplazamiento angular.

7.1.3 Elongación y velocidad del movimiento armónico simple

Sustituyendo $a=d^2x/dt^2$ en la definición (2) del movimiento armónico simple, tenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx$$

que es una ecuación diferencial cuya solución es:

$$x = A\cos(\sqrt{C}t + \delta) \qquad (3)$$

donde A *y* δ son constantes de integración. Podemos demostrar que esta x es solución de $d^2x/dt^2 = -Cx$ derivando x dos veces. La primera derivada con respecto al tiempo es la velocidad v de la partícula:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\sqrt{C}\,\mathrm{sen}(\sqrt{C}t + \delta) \qquad (4)$$

Derivando de nuevo con respecto obtenemos la aceleración del objeto:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -AC\cos(\sqrt{C}t + \delta) = -Cx \qquad (5)$$

y, por tanto, x es solución ya que satisface la igualdad (2).

Si representamos gráficamente la función *x(t)*, encontramos un comportamiento como el mostrado en la figura. En ella se refleja el comportamiento periódico de la función coseno, dando lugar a que el desplazamiento x, o *elongación* , adquiera valores que se van repitiendo en intervalos de tiempo regulares.

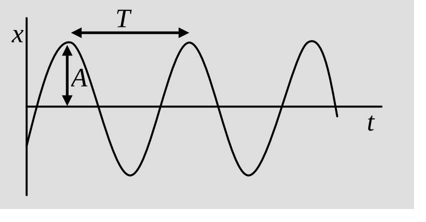


Fig. 1 *: Movimento armónico simple*

7.1.4 Amplitud, fase y constante de fase

Se llama *amplitud* al valor máximo de la elongación. Puesto que el máximo valor del coseno es 1, el máximo de x (la amplitud) coincide con la constante A.

El argumento de la función coseno, $(\sqrt{C}\ t + \delta)$, se denomina *fase* del movimiento, y la constante δ se denomina *constante de fase*. Puesto que $\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$ y $\mathrm{sen}(\alpha+2\pi)=\mathrm{sen}(\alpha)$, tenemos que cuando la fase aumenta en 2π, la partícula vuelve a tener la misma posición y velocidad.

La constante de fase depende de nuestra elección del instante cero. En efecto, para $t=0$, la elongación será $x_0 = A\cos(\delta)$. Por tanto, $\delta=0$ implica escoger el origen de tiempos en el instante en que $x_0 = A\cos(0) = A$. Del mismo modo, $\delta=\pi/2$ implica $x_0 = A\cos(\pi/2) = 0$, $\delta=\pi$ implica $x_0 = A\cos(\pi) = -A$, y así para cualquier otro valor de δ. Es decir, dado δ podemos deducir el valor inicial de x y, recíprocamente, dado x_0 podemos deducir el valor de δ.

Nótese que $\cos(\alpha)=\text{sen}(\alpha+\pi/2)$. Por tanto $x=A\cos(\sqrt{C}\,t+\delta)$ también puede escribirse de forma equivalente como $x = A\,\text{sen}(\sqrt{C}\,t+\delta+\pi/2) = A\,\text{sen}(\sqrt{C}\,t+\delta')$, siendo $\delta'=\delta+\pi/2$.

7.1.5 Periodo, frecuencia y frecuencia angular

Al tiempo T necesario para que la fase aumente en 2π , es decir, para que la partícula vuelva a tener la misma posición y velocidad, se denomina *periodo*. Su expresión puede deducirse mediante la condición

$$\cos(\sqrt{C}t+\delta+2\pi) = \cos(\sqrt{C}(t+T)+\delta) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{C}t+\delta+2\pi = \sqrt{C}(t+T)+\delta$$

es decir

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{C}}} \tag{6}$$

La *frecuencia f* y la *frecuencia angular* ω se definen como :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{C}} \tag{7}$$

cuyas unidades son s^{-1} (herzios, Hz) y rad/s, respectivamente.

En términos de la frecuencia angular, la elongación x, velocidad v y aceleración de una partícula con MAS se escriben :

$$\begin{aligned} &\boxed{x = A\cos(\omega t+\delta)} \\ &\boxed{v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t+\delta)} \\ &a = -A\omega^2\cos(\omega t+\delta) = -\omega^2 x \end{aligned} \tag{8}$$

7.1.6 Ejemplo : Masa unida a un muelle

Consideremos el caso de una partícula unida a un muelle horizontal (sobre una superficie sin rozamiento). Fijemos el sistema de referencia de modo que, cuando el muelle no está estirado, la partícula se encuentra en $x=0$. Al separar la partícula una pequeña distancia x respecto de su posición de equilibrio, sabemos de la lección anterior que el muelle ejercerá una fuerza de restitución elástica que viene dada por la ley de Hooke :

$$F = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad a=-(k/m)x$$

Puesto que esta expresión coincide con la definición del MAS, la partícula se moverá con un MAS siendo :

$$C = k / m, \qquad \omega = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (9)$$

7.2 Péndulo simple, físico y de torsión

7.2.1 Péndulo simple

Un péndulo simple está constituido por una partícula puntual de masa m suspendida de un hilo de longitud L y masa despreciable. Cuando el hilo está vertical, el peso de la partícula es contrarrestado por la tensión del hilo, por lo que el sistema se encuentra en equilibrio (la fuerza total es nula). Si separamos el hilo un cierto ángulo φ respecto de la posición vertical de equilibrio, tendremos que la tensión del hilo es contrarrestada por la componente del peso en la dirección del hilo, $mg\cos\varphi$, pero nos queda la otra componente del peso, $mg\operatorname{sen}\varphi$, que será la fuerza neta sobre m :

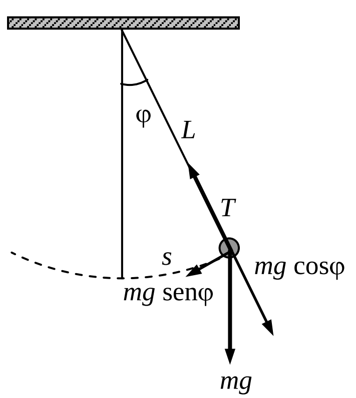


***Fig. 2** : Péndulo simple*

$$F = -mg \operatorname{sen} \varphi \qquad \Rightarrow \qquad a = -g \operatorname{sen} \varphi$$

Para ángulos pequeños se cumple que $\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$. Además, como el arco s descrito por el péndulo es $s=\varphi L$, tenemos que :

$$a = -\frac{g}{L} s$$

que es de la forma $a = -C\, s$ con $C=g/L$ y, por tanto, el movimiento del péndulo (con ángulos pequeños) es armónico simple. Una vez conocida la forma de C podemos afirmar que :

$$\boxed{C = g / L \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \qquad (10)$$

7.2.2 Péndulo físico

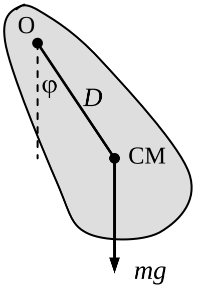


Fig. 3 *: Péndulo físico*

El péndulo físico está constituido por un cuerpo rígido de forma arbitraria que puede girar alrededor de un eje horizontal que no pasa por su centro de masas. Consideremos, en efecto, un objeto como el mostrado en la figura, que puede girar alrededor de un eje (perpendicular a la figura) que pasa por el punto O . Si desviamos el objeto un ángulo φ respecto de su posición de equilibrio, el momento de fuerzas ejercido por el peso respecto al punto de suspensión es :

$$\tau = -mgD \operatorname{sen} \varphi$$

Puesto que $\tau = I\alpha$, tenemos que

$$I\alpha = -mgD \operatorname{sen} \varphi \approx -mgD\varphi$$

donde, al igual que antes, hemos supuesto que el ángulo φ es pequeño y, por tanto, senφ≈φ.

Usando ahora la definición de aceleración angular, $\alpha = d^2\varphi/dt^2$, tenemos:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} - mgD\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgD}{I}\varphi$$

que tiene la misma forma que define el MAS, $\varphi'' = -C\varphi$, con $C = mgD/I$. Por tanto, el movimiento del péndulo físico es armónico simple, siendo

$$\boxed{C = mgD/I \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{mgD}{I}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgD}}} \qquad (11)$$

7.2.3 Longitud equivalente de un péndulo físico

Se llama *longitud equivalente* o *reducida* de un péndulo físico a la longitud que debería tener un péndulo simple para que su periodo fuera idéntico al periodo de ese péndulo físico :

$$T_{pf} = T_{ps} \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgD}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}}$$

o bien, despejando L_{eq} :

$$\boxed{L_{eq} = \frac{I}{mD}} \qquad (12)$$

7.2.4 Péndulo de torsión

Está constituido por un hilo o alambre con su extremo superior fijo mientras que el otro extremo lleva suspendido un objeto que puede girar alrededor del eje de simetría del alambre. Como sabemos, si ejercemos un momento de fuerzas sobre el extremo libre, el alambre experimentará una deformación por torsión que, para pequeños ángulos, viene dada por la ley de Hooke :

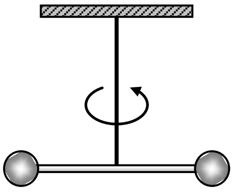


Fig. 4: Péndulo de torsión

$$\tau = -K\varphi$$

o bien, llamando I al momento de inercia del objeto suspendido, y usando $\tau = I\alpha$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{K}{I}\varphi$$

que, de nuevo, tiene la forma requerida para un movimiento armónico simple, con C=1/IK. Por tanto :

$$\boxed{C = K/I \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{K}{I}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}} \qquad (13)$$

7.3 Energía del movimiento oscilatorio

7.3.1 Energía cinética del m.a.s.

Hemos visto que, en un movimiento armónico simple, la posición y la velocidad vienen dados por :

$$x = A\cos(\omega t + \delta), \qquad v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

Por tanto, la energía cinética de una partícula dotada con este tipo de movimiento viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2(1 - \cos^2(\omega t + \delta)) \qquad (14)$$

es decir

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)} \qquad (15)$$

7.3.2 Energía potencial

Puesto un m.a.s. está sometido, por definición, a una fuerza de la forma F=-kx (donde $k=m\omega^2$), el trabajo realizado por dicha fuerza para trasladarse desde un punto x_1 a otro x_2 es :

$$W = -\int_1^2 kxdx = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \tag{16}$$

que depende únicamente de las coordenadas inicial y final. Por tanto, podemos definir una función de energía potencial, E_p, de modo que el trabajo puede expresarse como $W=-\Delta E_p$, con:

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2} \tag{17}$$

o bien,

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \tag{18}$$

7.3.3 Energía mecánica total

La suma de la energía cinética más la energía potencial es la energía mecánica total del movimiento armónico simple. Más concretamente:

$$E_T = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \tag{19}$$

Es decir, la energía mecánica de la partícula es constante (como era de esperar pues sólo actúan fuerzas conservativas).

Según se deduce de (17), la energía potencial aumenta al aumentar la elongación, siendo máxima para $x=A$, en cuyo caso se tiene $E_p=(1/2)kA^2$, que coincide con la energía mecánica total e implica que la energía cinética ha de ser nula en ese instante.

7.4 Oscilaciones amortiguadas y forzadas: resonancia

7.4.1 Movimiento vibratorio amortiguado

Hasta ahora hemos considerado que los movimientos oscilatorios duran indefinidamente. Sin embargo, en la realidad siempre observamos que las oscilaciones tienen una amplitud que disminuye progresivamente hasta que el sistema acaba deteniéndose. Esto es debido a que siempre existen rozamientos que provocan una pérdida de energía mecánica. Puesto que la energía mecánica total de un MAS viene dada por E_T = $(1/2)kA^2$, una disminución en E_T implica una disminución en la amplitud A de las oscilaciones. Se dice entonces que el movimiento oscilatorio es amortiguado.

7.4.2 Ecuación diferencial del movimiento amortiguado

Hemos visto que el caso ideal de un MAS está definido por la existencia de fuerzas de la forma $-kx$ y que, por tanto, la ecuación diferencial del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (20)$$

cuya solución es $x=A\cos(\omega_0 t+\delta)$ donde $\omega_0=(k/m)^{1/2}$. Ahora sabemos que, en una situación real, siempre existe una fuerza de rozamiento que debe ser sumada a la fuerza elástica $-kx$. En los fenómenos de mayor interés, se observa que dicha fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad:

$$F_{roz} = -bv \qquad (21)$$

(la constante de proporcionalidad, b, recibe el nombre de *coeficiente de amortiguamiento*) y, por tanto, la fuerza total sobre la partícula es :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv \qquad (22)$$

La solución de esta ecuación diferencial es (puede comprobarse sustituyendo en la ecuación):

$$\boxed{x = A_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)} \qquad (23)$$

donde la constante A_0 es el desplazamiento inicial, $\tau_R=2m/b$ es una constante denominada *tiempo de relajación*, y la frecuencia ω' viene ahora dada por:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau_R^2}}} \qquad (24)$$

siendo $\omega_0=(k/m)^{1/2}$ la frecuencia que el sistema tendría si no estuviera amortiguado (también llamada *frecuencia natural*).

7.4.3 Amplitud del movimiento : decremento logarítmico

Vemos que la solución (23) es muy parecida a la de un MAS salvo que la amplitud efectiva es ahora :

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-t/\tau_R}} \qquad (25)$$

es decir, disminuye exponencialmente con el tiempo (véase figura).

Nótese que, si llamamos A_1 a la amplitud en cierto instante t, el valor de ésta habrá disminuido al cabo de una oscilación (es decir, en el instante $t+T$, siendo $T=2\pi/\omega'$). La relación entre ambas amplitudes será :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_0 e^{-t/\tau_R} \\ A_2 &= A_0 e^{-(t+T)/\tau_R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = e^{T/\tau_R} \Rightarrow \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{T}{\tau_R} \tag{26}$$

El logaritmo neperiano de dos elongaciones máximas sucesivas se denomina *decremento logarítmico:*

$$\Delta = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{T}{\tau_R} \tag{27}$$

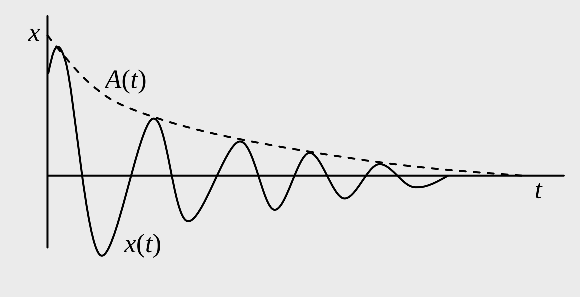


***Fig. 5** : Oscilaciones amortiguadas*

Experimentalmente, resulta fácil determinar Δ y T, lo que permite calcular τ_R y ω_0 usando (27) y (24).

7.4.4 Energía del movimiento: constante de tiempo

Lo mismo ocurre con la energía mecánica de la partícula :

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau} \tag{28}$$

donde hemos llamado

$$\boxed{\tau = \tau_R / 2 = m/b} \tag{29}$$

al factor constante que aparece en la exponencial. Dicho factor se denomina *constante de tiempo* y representa el tiempo que tarda la energía en disminuir un factor $1/e$.

7.4.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguado

Examinando la expresión (24) para la frecuencia ω del movimiento oscilatorio amortiguado vemos que sólo tendrá valores reales positivos si el coeficiente de amortiguamiento es menor que cierto valor crítico : $b<b_c=2m\omega_0$. Cuando $b>b_c=2m\omega_0$, la expresión (24) implica que ω no es un número real y, por tanto, la amplitud decrece sin llegar a oscilar. Se dice entonces que el movimiento está sobreamortiguado. El caso $b=b_c=2m\omega_0$, corresponde a $\omega=0$ que, pese a ser real, también implica que la amplitud decrece sin llegar a oscilar. Se dice entonces que el movimiento está críticamente amortiguado.

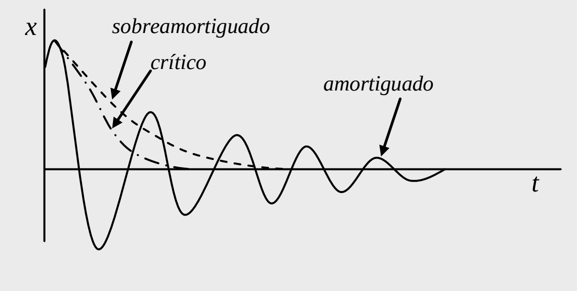


Fig. 6 *: Oscilaciones amortiguadas, sobreamortiguadas y críticas*

7.4.6 Oscilaciones forzadas

Hemos visto que, en las oscilaciones amortiguadas, la energía se disipa continuamente hasta que el sistema deja de oscilar. Para mantener en marcha un sistema amortiguado es necesario ir introduciendo energía en el sistema. Cuando se lleva a cabo esto, se dice que el oscilador es forzado.

Así, por ejemplo, una manera de suministrar energía a un sistema formado por un objeto suspendido de un muelle vertical es mover el extremo superior del muelle hacia abajo y hacia arriba, como se indica en la figura. Si se introduce energía al mismo ritmo que ésta se disipa, la amplitud permanecerá constante con el tiempo. En cambio, si se introduce energía a un ritmo mayor del que se disipa, la amplitud crecerá indefinidamente con el tiempo.

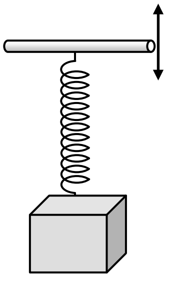


Fig. 7 *: Oscilador forzado*

Para estudiar matemáticamente el movimiento de un oscilador forzado, supondremos un sistema que está sometido a las siguientes fuerzas : una fuerza elástica, –*kx*, una fuerza de amortiguamiento, –*bv*, y fuerza exterior impulsora que varía armónicamente con el tiempo :

$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t) \tag{30}$$

donde ω_e es la frecuencia angular de la fuerza, que generalmente no está relacionada con la frecuencia natural del sistema ω_0.

La fuerza total será entonces :

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos(\omega_e t) \quad \Rightarrow \quad F_0 \cos(\omega_e t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx \tag{31}$$

que es una ecuación diferencial cuya solución es de la forma :

$$\boxed{x = A\cos(\omega_e t - \delta) + A_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega' t - \delta')} \tag{32}$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{\sqrt{(b\omega_e)^2 + (k - m\omega_e^2)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(b\omega_e)^2 + [m(\omega_0^2 - \omega_e^2)]^2}} \\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{b\omega_e}{k - m\omega_e^2} = \frac{b\omega_e}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)} \end{aligned}} \tag{33}$$

De los dos términos que aparecen a la derecha de (32), el último decrece muy rápidamente (por contener una exponencial negativa) hasta hacerse completamente despreciable al cabo de poco tiempo. Por ello, dicho término recibe el nombre de *solución transitoria*. En cambio, el primer término de la derecha es formalmente idéntico a un movimiento armónico simple no amortiguado (cuya frecuencia angular coincide con la impulsora ω_e) y recibe el nombre de *solución estacionaria*. Salvo en los primeros instantes, en los que el sistema realiza una serie de vibraciones anómalas, este término es quien domina el movimiento por lo que podremos considerar :

$$x = A\cos(\omega_e t - \delta) \tag{34}$$

7.4.7 Resonancia

Se llama *impedancia mecánica* al denominador de la expresión para la amplitud

$$\boxed{Z = \sqrt{(b\omega_e)^2 + [m(\omega_0^2 - \omega_e^2)]^2}} \tag{35}$$

Obviamente, cuando la frecuencia ω_e de la fuerza externa tiene un valor tal que la impedancia se hace mínima, entonces las oscilaciones tendrán la máxima amplitud posible. Se dice entonces que el oscilador se encuentra en *resonancia*. Así, por ejemplo, si el sistema no está amortiguado ($b=0$), el valor mínimo de Z se alcanza cuando la fuerza externa tiene una frecuencia que coincide con la frecuencia natural $\omega_e=\omega_0$. En este caso, la ecuación anterior implica $Z_{min}=0$ y, por tanto, la amplitud alcanza un valor máximo infinito $A_{max}=\infty$. Es decir, la energía del sistema se hace infinita. En cambio, si el sistema está amortiguado ($b\neq 0$), la frecuencia de resonancia será aquella que verifique la condición de mínimo para Z ($dZ/d\omega = 0$). Efectuando operaciones, dicha frecuencia viene dada por:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2\,m^2}} \qquad (36)$$

Existen muchos ejemplos familiares de resonancia. Cuando un grupo de soldados pasa por un puente pequeño, normalmente dejan de marcar el paso pues la frecuencia de su marcha podría coincidir con una de las frecuencias naturales del puente. En ese caso, el puente comenzaría a oscilar en resonancia pudiendo llegar a derribarse. Otro ejemplo es la rotura de un vaso de vidrio mediante una onda sonora de frecuencia próxima a la frecuencia de vibración del vaso.

CUESTIONES TEORICAS

1. **Diga, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: a) La aceleración de un oscilador armónico simple permanece constante durante su movimiento; b) La aceleración de un oscilador armónico simple es alguna vez cero**

   a) Falso. En un m.a.s. la aceleración es proporcional al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio (aunque con dirección opuesta) y, por tanto, no es constante; b) Cierto. La aceleración es cero cuando el objeto pasa por su posición de equilibrio

2. **¿Cuál es la distancia total recorrida por un cuerpo en m.a.s. en un tiempo igual a su periodo si su amplitud es A?**

   Cuatro veces A ya que, en un periodo, el cuerpo describe una oscilación completa: $2A$ en la ida y $2A$ en la vuelta.

3. **Si el movimiento de una partícula viene dado por $x=-A\cos(\omega t)$, a) ¿cuál es su posición inicial b) ¿cuál es su constante de fase?;?**

   a) En $t=0$, se tendrá $x=-A\cos(0)=-A$; b) La expresión general de un m.a.s. $x=A\cos(\omega t+\delta)$ se reduce, para $t=0$, a $x=A\cos(\delta)$. Comparando esta última con el resultado del primer apartado $x=-A$, tenemos $\cos(\delta)=-1$. Por tanto, $\delta=\mathrm{acos}(-1)=\pi$

4. **Diga si las siguientes cantidades pueden tener, o no, el mismo sentido en un oscilador armónico simple: a) la elongación y la velocidad; b) la velocidad y la aceleración; c) la elongación y la aceleración**

   a) Sí, cuando la partícula se aleja de la posición de equilibrio; b) Sí, cuando la partícula se acerca a la posición de equilibrio a la posición de equilibrio; c) No, ya que el m.a.s. se define como aquel en que la aceleración es proporcional, pero de sentido contrario, a la elongación.

5. Si construimos un péndulo mediante una pequeña esfera llena de agua suspendida de un hilo ideal, ¿Qué le ocurriría al periodo del péndulo si hubiera un orificio en la esfera que dejara salir lentamente el agua?

El periodo de un péndulo simple viene dado por $T=2\pi(L/g)^{1/2}$, que no depende de la masa. Por tanto, si consideramos que la esfera es mucho más pequeña que el hilo (con lo que podemos despreciar alteraciones en la posición de su c.d.m.), el periodo no cambiará de forma apreciable.

6. ¿Por qué la energía total de un sistema masa-resorte nunca puede ser negativa?

Porque, si no hay pérdidas por rozamiento, la energía total debe permanecer constante. Al pasar por la posición de equilibrio, toda la energía está en forma de energía cinética (positiva). Por tanto, en cualquier otra posición la energía tendrá el mismo valor positivo que cuando se encontraba pasando por la posición de equilibrio.

7. ¿Cuál es la ecuación diferencial de un MAS?. ¿Cuál es su solución?

Es la ecuación (3), cuya solución viene dada por $x = A\cos(\omega t+\delta)$, donde x es la elongación, A es la amplitud (elongación máxima), ω es la frecuencia angular (siendo $\omega^2 = k$), y δ es la constante de fase.

8. a) ¿Describe siempre, un péndulo simple, un MAS?; b) ¿Y un péndulo físico?

a) No, en un péndulo simple, sólo se obtiene la ecuación diferencial de un MAS para pequeños ángulos (donde es válida la aproximación sen $\theta \approx \theta$); b) No. En un péndulo físico también es necesario que sen $\theta \approx \theta$.

9. ¿Qué es la longitud reducida de un péndulo físico?

Es la longitud que tendría un péndulo simple del mismo periodo que el físico.

10. ¿Qué significa "batir segundos"?. ¿Qué longitud tiene un péndulo simple que bate segundos?

Que el semiperiodo (la mitad del periodo) es de 1 segundo. Para un lugar donde $g = 9{,}8$ m/s^2 se tiene $2\text{s} = 2\pi\sqrt{(l/\text{g})} \Rightarrow l = 1\text{m}$.

11. Un oscilador armónico se ve frenado por una fuerza proporcional a la velocidad. ¿Qué le ocurre a la amplitud?. ¿Cuál es su ecuación diferencial?, ¿y su solución?

Debido al rozamiento la energía mecánica del oscilador decrece, lo que conlleva una disminución de la amplitud. Como se ha visto en el apartado 7.4.2, para una fuerza de rozamiento del tipo $F = -bv$ (fuerza viscosa), el movimiento viene descrito por la ecuación diferencial (22) cuya solución es: $x = A_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega t+\delta)$, donde A_0 es la amplitud en t=0 y $A=A_0\, e^{-t/\tau}$ es la amplitud en el instante t. La frecuencia angular $\omega = \sqrt{(\omega_0^2-\tau^{-2})}$, donde $\omega_0=\sqrt{(k/m)}$ es la pulsación propia del oscilador no amortiguado y $\tau = 2m/b$ es el tiempo de relajación, que es el tiempo que tarda la amplitud en hacerse e veces menor, siendo δ la fase inicial.

12. ¿Qué significado físico tiene el decremento logarítmico?

El decremento logarítmico, Δ, se define como el cociente entre el periodo y el tiempo de relajación e informa del ritmo de decrecimiento de la amplitud.

13. ¿El periodo de un oscilador amortiguado es igual al del oscilador sin amortiguar?

No, un oscilador amortiguado tiene un periodo dado por $T = 2\pi/\omega$ y un oscilador no amortiguado tiene un periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$ siendo $\omega = \sqrt{(\omega_0^2-\tau^{-2})}$, donde τ es el tiempo de relajación.

14. ¿Qué es el amortiguamiento crítico?

Decimos que hay amortiguamiento crítico si la fuerza viscosa tiene un coeficiente de amortiguamiento $b=2m\omega_0$. Entonces la frecuencia angular ω se hace cero, lo que equivale a que la amplitud decrece sin oscilar hasta hacerse cero.

15. ¿Cuándo aparecen vibraciones forzadas?

Cuando se aplica al oscilador una fuerza sinusoidal de frecuencia ω, ($F=F_0\cos\omega t$). En este caso, tras un periodo transitorio, el oscilador oscila con la pulsación ω.

16. ¿Cuál es la ecuación diferencial de un oscilador forzado?. ¿Y su solución?

La ecuación (31), cuya solución estacionaria es $x = A\cos(\omega t\text{-}\delta)$, donde δ mide el adelanto o atraso de x respecto a F.

17. ¿Cuándo decimos que un oscilador está en resonancia?

La amplitud de una oscilación forzada depende de la frecuencia angular ω y alcanza su valor máximo cuando $\omega^2=\omega_R^2=\omega_0^2-b^2/2m^2$. Decimos entonces que el oscilador está en resonancia.

18. Es frecuente oír que el fenómeno de la resonancia ocurre cuando la frecuencia de la fuerza aplicada coincide con la frecuencia natural del oscilador, ¿es correcto?.

No, esto sólo es así cuando el coeficiente de amortiguamiento b es cero, alcanzándose una amplitud infinita.

19. ¿Podría llegar a romperse un objeto por resonancia?

Si, basta con que la fuerza impulsora actúe suficiente tiempo y que la amplitud alcanzada sea lo suficientemente grande para superar el límite de ruptura del material.

PROBLEMAS RESUELTOS

Cinemática del movimiento armónico simple

Fórmulas básicas

Periodo: $T = 2\pi/\omega$

Frecuencia: $\nu = 1/T = \omega/2\pi$

Desplazamiento, velocidad y aceleración:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta) = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

Condiciones iniciales: $x_0 = A\cos\delta$; $v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\delta$

Cinemática del movimiento armónico: Estrategia para resolver problemas

1. Los problemas aquí agrupados sólo requieren calcular posiciones, velocidades y aceleraciones en diversos instantes, sin intervención de la masa ni de las causas o fuerzas que han originado ese movimiento. Se trata por tanto de problemas esencialmente idénticos a cualquier otro problema de cinemática de la partícula. En consecuencia, las sugerencias efectuadas en la lección 1 sigue siendo válidas aquí.

2. En muchos casos, el problema se reduce a determinar las constantes A, ω, y δ que aparecen en $x=A\cos(\omega t + \delta)$ (o también en las expresiones de v y a). La frecuencia angular ω puede calcularse a partir de magnitudes relacionadas: el periodo T o la frecuencia ν. Por otra parte, la amplitud A y la constante de fase δ pueden ser obtenidas a partir de los valores iniciales de la posición y velocidad: x_0 y v_0. Ello suele requerir resolver el sistema de ecuaciones: $x_0=A\cos\delta$; $v_0=-A\omega\operatorname{sen}\delta$. Lleve cuidado al calcular funciones trigonométricas inversas, recuerde que un mismo valor del seno puede corresponder a dos valores distintos de δ (p.ej, sen $\pi/4$ =sen $3\pi/4$). Fíjese en los signos de $\cos\delta$ y $\operatorname{sen}\delta$ para determinar correctamente el valor de δ

1. Un punto material tiene un movimiento armónico simple sobre el eje X, de amplitud 1 m y frecuencia angular π rad/s. Hallar: a) su periodo y frecuencia, b) la ecuación del movimiento sabiendo que, inicialmente, la partícula se encuentra en su posición media moviéndose hacia el sentido positivo, c) velocidad y aceleración en función del tiempo, d) tiempo mínimo necesario para que la elongación valga –0.5 m, e) velocidad máxima de la partícula.

[*Solución:* a) 0,5 Hz, b) x=sen(πt), c) v=πcos(πt), a=-$\pi^2 x$, d) 7/6 s, e) π m/s] H

a) El periodo valdrá:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,\text{s}$$

y la frecuencia:

$$\nu = 1/T = 1/2 = 0{,}5\,\text{Hz}$$

b) La posición viene dada por la ecuación $x = A\cos(\omega t + \delta)$, donde conocemos el valor de A y ω, pero debemos determinar δ. Para ello, tenemos en cuenta que en $t=0$ debe cumplirse x=0 y v>0. Es decir:

$$x_0 = 0 \Rightarrow A\cos\delta = 0 \Rightarrow \delta = \pm\pi/2$$

De las dos posibles soluciones para δ, sólo δ=–π/2 conduce a una velocidad inicial positiva: $v_0 = -A\omega\,\text{sen}\delta = -A\omega\,\text{sen}(-\pi/2) = A\omega > 0$. Por tanto, δ=–π/2 es la solución correcta y:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = 1\cdot\cos(\pi t - \pi/2) = \text{sen}(\pi t)$$

c) La velocidad y aceleración serán:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pi\cos(\pi t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\pi^2\,\text{sen}(\pi t) = -\pi^2 x$$

d) Si x=–0.5 m, tendremos:

$$-0.5 = \text{sen}\,\pi t \Rightarrow \pi t = \text{arcsen}(-1/2) = \begin{cases} 7\pi/6 \\ 11\pi/6 \end{cases} \Rightarrow t = 7/6\,\text{s}$$

De las dos posibles soluciones, hemos tomado 7π/6 ya que conduce al valor más pequeño para t.

e) La expresión $v = \pi\cos(\pi t)$ será máxima cuando cos(πt)=1. Es decir:

$$v_{max} = \pi\ \text{m/s}$$

2. Una partícula se mueve con una aceleración dada por a=–16π^2x (unidades cgs). Sabiendo que el desplazamiento máximo es de 4 cm y que se ha comenzado a contar el tiempo cuando el desplazamiento es positivo y la aceleración adquiere su valor absoluto máximo, determinar: a) La ecuación del movimiento; b) La velocidad y aceleración máximas; c) La velocidad y aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo

[*Solución:* a) x=4 cos(4πt), b) 16π cm/s, -64π^2 cm/s^2, c) 8π√3 cm/s, -32π^2 cm/s^2] H

a) Según el enunciado, la amplitud del m.a.s. es A=4 cm. Además, comparando a=–16π^2x, con la expresión general a=–ω^2x, tenemos que:

$$\omega = \sqrt{16\pi^2} = 4\pi \text{ rad/s}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \delta) \\ a &= -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(0) &= A\cos(\delta) \\ a(0) &= -A\omega^2\cos(\delta) \end{aligned}$$

vemos que la aceleración es inicialmente máxima (en valor absoluto) cuando cos(δ)=±1, es decir δ=0 o bien δ=π. La primera posibilidad (δ=0) implica x(0)=Acos(0)=A>0, mientras que la segunda (δ=π.) implica x(0)=Acos(π)= –A<0. Puesto que el enunciado nos dice que el desplazamiento es inicialmente positivo, la solución correcta para la constante de fase es δ=0. Por tanto

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \delta) = 4\cos(4\pi t) \\ v &= -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \delta) = -16\pi\,\text{sen}(4\pi t) \\ a &= -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -64\pi^2\cos(4\pi t) \end{aligned}$$

b) La velocidad será máxima cuando sen(4πt)=±1, mientras que la aceleración será máxima cuando cos(4πt)=±1. Es decir ,

$$v_{max} = \pm 16\pi \text{ cm/s}; \qquad a_{max} = \pm 64\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

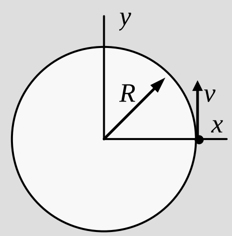
c) Sustituyendo x=A/2=2 cm en $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$, tenemos

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{16-4} = 8\pi\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

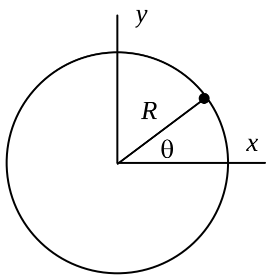
y sustituyendo x=A/2=2 cm en a=–ω^2x, tenemos:

$$a = -16\pi^2 2 = -32\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

3. Una partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de una circunferencia de radio R centrada en el origen. Inicialmente se encuentra en la posición indicada en la figura: a) Demostrar que la componente *x* de su posición describe un movimiento armónico simple, y determinar cuál es su amplitud y periodo, b) Obtener la expresión para *x*



[*Solución:* a) $A=R$, $T=2\pi R/v$, b) $x(t)=R\cos(vt/R)$] H



a) En un instante cualquiera, la partícula se encontrará en una posición arbitraria como la mostrada en la figura, formando un ángulo θ con el eje *x*. Por tanto:

$$x(t) = R\cos\theta$$

Donde:

$$s = R\theta$$

y, puesto que *v* es constante:

$$s = s_0 + vt$$

Es decir:

$$x(t) = R\cos(vt/R + s_0/R)$$

Comparando esta ecuación con

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

tenemos que la componente *x* del movimiento circular uniforme corresponde a un m.a.s. de amplitud $A=R$, constante de fase $\delta=s_0/R$, y frecuencia angular:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

El periodo de este movimiento será entonces:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

b) Puesto que la partícula se encuentra inicialmente sobre el eje *x*, tenemos que $x(0)=A$ (o bien $s_0=0$). La constante de fase es entonces nula y la ecuación de su movimiento se reduce a:

$$x(t) = R\cos(vt/R)$$

Dinámica del movimiento armónico simple

Fórmulas básicas

Condición de m.a.s.: $F = -kx \quad \Leftrightarrow \quad a=-(k/m)x$:

$\tau=-k\varphi$, o bien $\alpha = -C\varphi$.

Frecuencia angular y periodo: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Expresiones cinemáticas:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

Dinámica del movimiento armónico: Estrategia para resolver problemas

1. Dado un objeto, sometido a diferentes fuerzas, identifique la línea (recta o curva) sobre la que el objeto describe un movimiento periódico. Identifique también la posición de equilibrio dentro de esta línea.

2. Escoja una variable de longitud x, o de ángulo θ, que permita definir sin ambigüedad la posición del objeto dentro de la línea anterior. Es conveniente que la variable escogida sea cero cuando el objeto se encuentra en la posición de equilibrio.

3. Calcule la fuerza neta sobre el objeto en función de la variable x escogida en el apartado anterior. El problema estará prácticamente resuelto si consigue expresar F en la forma F=-kx, con lo que podrá identificar el valor de la constante k. Si la variable fuera un ángulo θ, lo que debe calcular generalmente es el momento de fuerzas y expresarlo en la forma $\tau=-k\varphi$.

4. Una vez conocida k, podrá calcular la frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ y el periodo de la oscilación. El enunciado debe dar también los datos suficientes para conocer la amplitud del m.a.s. y la constante de fase, con lo que $x=A\cos(\omega t+\delta)$, y el problema ya es puramente cinemático.

4. Un muelle, de 40 cm de longitud natural, se encuentra en posición vertical con su extremo superior fijado al techo. Al poner una masa de 50 g en su extremo inferior, observamos que la longitud del muelle es de 45 cm. A continuación, desplazamos la masa 6 cm hacia abajo, con respecto a la posición de equilibrio, y luego la soltamos. Calcular: a) la constante del muelle, b) Posición, velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo, c) Velocidad, aceleración y fuerza cuando la partícula se encuentra subiendo a 2 cm por encima de la posición de equilibrio.

[*Solución*: c) 9,8 N/m, b) x=0,06 cos(14t), c) –0,79 m/s; 3,91 m/s^2; 0,2 N] H

a) En la situación de equilibrio, el peso es igual (en módulo) a la fuerza elástica:

$$mg = kx \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{x} = \frac{mg}{L - L_0} = \frac{0{,}05 \cdot 9.8}{0{,}45 - 0{,}4} = 9{,}8 \text{ N/m}$$

b) La frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{9{,}8/0.05} = 14 \text{ rad/s}$$

Inicialmente, la partícula se encuentra en reposo v_0 =0, en la posición x_0=0.06 m (consideramos positivos los desplazamientos hacia abajo). Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0{,}06 = A\cos\delta \\ v_0 &= 0 = -14A\,\text{sen}\,\delta \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \delta = 0; \quad A = 0{,}06 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \delta) = 0{,}06\cos(14t) \\ v &= -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \delta) = -0{,}84\,\text{sen}(14t) \\ a &= -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -11{,}76\cos(14t) \end{aligned}$$

c) Cuando x=–0.02 y la partícula se encuentra subiendo (v<0), tenemos:

$$-0{,}02 = 0{,}06\cos(14t) \Rightarrow \cos(14t) = -1/3 \Rightarrow 14t = \begin{cases} 1{,}91 \text{ rad} \\ -1{,}91 \text{ rad} \end{cases}$$

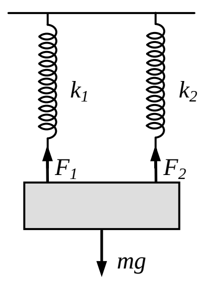
$$-0{,}84\,\text{sen}(14t) < 0 \Rightarrow \text{Solucion correcta}: 14t = 1{,}91 \text{ rad} \Rightarrow t = 0{,}137 \text{ s}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} v &= -0{,}84\,\text{sen}(14t) = -0{,}84\,\text{sen}(1{,}91) = -0{,}79 \text{ m/s} \\ a &= -11{,}76\cos(14t) = -11{,}76\cos(1{,}91) = 3{,}91 \text{ m/s}^2 \\ F &= ma = 0{,}05 \cdot 3{,}91 = 0{,}2 \text{ N} \end{aligned}$$

5. Se tienen dos muelles de constantes recuperadoras k_1 y k_2. a) Hallar la constante recuperadora del sistema formado con los dos muelles en paralelo, b) Hallar la constante recuperadora del sistema formado con los dos muelles en serie

[*Solución:* a) $k = k_1 + k_2$, b) $k = k_1k_2/(k_1 + k_2)$] HH



a) Al suspender un peso mg de los dos muelles dispuestos en paralelo, el sistema se deforma una distancia x tal que

$$kx = mg$$

donde k es la constante recuperadora de un muelle equivalente al conjunto de esos dos muelles.

Puesto que los dos muelles se deforman lo mismo, x, tendremos para cada uno de ellos que:

$$F_1 = k_1x; \qquad F_2 = k_2x$$

Aplicando la segunda ley de Newton al objeto suspendido de los muelles:

$$F_1 + F_2 = mg$$

Sustituyendo aquí las relaciones anteriores, tenemos:

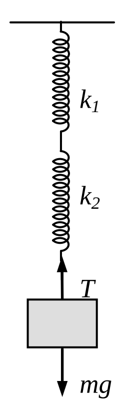
$$k_1x + k_2x = kx$$

Por tanto:

$$k = k_1 + k_2$$

b) Al suspender un peso mg de los dos muelles dispuestos en serie, la deformación total del sistema, x, es la suma de las dos deformaciones individuales, x_1 y x_2, experimentadas por cada uno de los muelles:

$$x = x_1 + x_2$$



Puesto que los muelles son de masa despreciable, ambos están sometidos a la misma fuerza T que, en este sistema, verifica $T = mg$. Por tanto:

$$mg = kx; \qquad mg = k_1x_1; \qquad mg = k_2x_2$$

siendo k la constante recuperadora de un muelle equivalente al conjunto de los dos muelles.

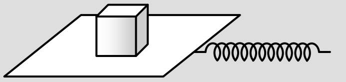
Despejando las deformaciones y sustituyendo en $x = x_1 + x_2$, obtenemos:

$$\frac{mg}{k} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2}$$

Es decir:

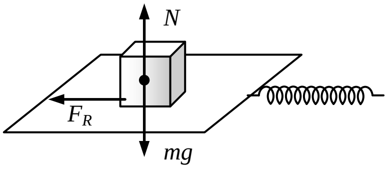
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \text{o bien} \qquad k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$$

6. Un bloque se encuentra sobre una superficie que se mueve horizontalmente efectuando oscilaciones de frecuencia angular 7 rad/s.



Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0.3, ¿cuál debe ser la amplitud del movimiento de la superficie para que el bloque no deslice sobre ella?.

[*Solución*: 6 cm] H



Si el bloque no desliza sobre la superficie, su movimiento es también armónico simple. Por tanto, cuando la elongación coincide con la amplitud A, la fuerza que actúa sobre él debe ser de la forma:

$$F_R = kA = m\omega^2 A$$

Siendo m la masa del bloque.

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

1) el peso, $-mg$
2) la reacción normal de la superficie, $N = mg$
3) la fuerza de rozamiento con la superficie, F_R

Puesto que las dos primeras se cancelan entre sí, la fuerza neta sobre el bloque coincide con la fuerza de rozamiento:

$$F = F_R = \mu mg$$

Igualando las dos expresiones para la fuerza neta

$$m\omega^2 A = \mu mg$$

obtenemos

$$A = \frac{\mu g}{\omega^2}$$

Sustituyendo datos:

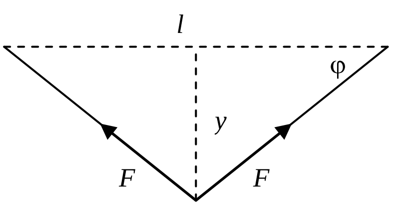
$$A = \frac{0{,}3 \cdot 9{,}8}{7^2} = 0{,}06\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{cm}$$

Hemos supuesto que la superficie no tiene masa.

7. Una cuerda horizontal fija en sus extremos, de longitud l, está tensada mediante una fuerza f. En su centro está sujeta una bolita de masa m. Despreciando la masa de la cuerda y no teniendo en cuenta la fuerza de la gravedad, ¿cuál es el período para pequeñas oscilaciones de m al separarla transversalmente una distancia "y" y soltarla?.

[*Solución*: $\omega^2=4F/mL$] H

Supongamos que tenemos la cuerda horizontal de longitud l y que separamos la bolita una cantidad y pequeña y la dejamos en movimiento. El diagrama de fuerzas aplicadas sobre la bolita (sin tener en cuenta la de la gravedad) es el que aparece en la figura. Sólo tendremos movimiento en el eje Y, ya que en el eje X las componentes horizontales de las fuerzas F se anulan.



Aplicando la segunda ley de Newton al eje Y:

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow 2F\,\text{sen}\,\varphi = ma_y$$

Como la distancia y es muy pequeña podemos suponer que la longitud de la cuerda prácticamente no varía. El ángulo φ es entonces muy pequeño, y su seno puede aproximarse a la tangente:

$$\text{sen}\,\varphi \approx \text{tg}\,\varphi = -y/(l/2) = -2y/l$$

Sustituyendo esto en la ecuación del movimiento, tenemos:

$$2F\,\text{sen}\,\varphi = ma_y \quad \Rightarrow \quad -2F\frac{2y}{l} = ma_y$$

es decir,

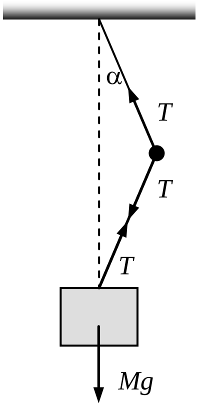
$$a_y = -\left(\frac{4F}{ml}\right)y$$

que corresponde a un movimiento armónico simple cuya frecuencia angular viene dada por:

$$\omega^2 = \frac{4F}{ml} \quad \Rightarrow \quad T = \pi\sqrt{\frac{ml}{F}}$$

8. Una cuerda vertical de longitud L=1 m está tensa bajo un peso de 20 kg atado a su extremo. En el centro de la cuerda hay una masa pequeña de 1 g. Separamos este pequeño peso de su posición de equilibrio una distancia pequeña x y lo soltamos. a) Demostrar que se mueve con un m.a.s.; b) hallar la frecuencia de la vibración.

[*Solución*: 885,4 rad/s] HH



a) Como el peso de 20 kg es mucho mayor que la masa de 1 g, podemos despreciar el efecto del peso de la bolita, y tendremos el diagrama de sólido libre que aparece en la figura. Aplicando la segunda ley de Newton a las componentes horizontales:

$$ma = -2T \operatorname{sen} \alpha$$

donde, por geometría:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{L/2} = 2x/L$$

Obtenemos entonces:

$$F = -4Tx/L$$

Nos falta únicamente determinar cuánto vale la tensión T de la cuerda. Para determinarla aislamos el cuerpo de 20 kg al que está unido la cuerda. Si la bolita realiza una oscilación muy pequeña, podemos suponer que este cuerpo prácticamente no se mueve, por lo que:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T \cos \alpha - Mg = 0$$

Además, si la oscilación es muy pequeña, el ángulo α también es muy pequeño, por lo que podemos aproximar:

$$\cos\alpha \approx 1$$

Nos queda entonces:

$$T\cos\alpha - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = Mg$$

Si sustituimos esto en la expresión que teníamos del movimiento de la pequeña masa:

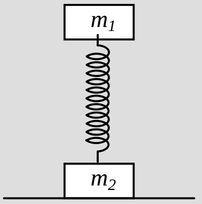
$$F = -4(Mg/L)x$$

Como podemos ver, tenemos la expresión de un movimiento armónico simple, como queríamos demostrar.

b) En la ecuación la frecuencia angular será:

$$k = 4Mg/L \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{4Mg/mL} = \sqrt{4 \cdot 20 \cdot 9{,}8 / 0{,}001 \cdot 1} = 885{,}4 \text{ rad/s}$$

9. Dos bloques, de masas m_1=15 kg y m_2= 20 kg, están unidos por un muelle vertical de masa despreciable. El conjunto, se apoya sobre un plano horizontal como se muestra en la figura. Si m_1 oscila verticalmente con amplitud 2 cm y frecuencia 5 Hz:



a) ¿Cuál es la fuerza máxima y la fuerza mínima que debe soportar el plano sobre el que se apoya el conjunto?,

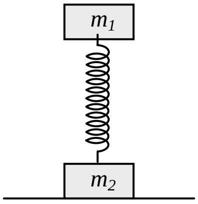
b) ¿Qué valor mínimo debería tener la amplitud de las oscilaciones para que, en ciertos instantes, el plano no soporte ninguna fuerza?

[*Solución*: 639N, 47N, 2.3cm] HH

El módulo de la fuerza máxima ejercida por el muelle sobre la masa m_1 es:

$$F = kA = m_1\omega^2 A = m_1(2\pi f)^2 A = 15 \cdot 4\pi^2 \cdot 5^2 \cdot 0{,}02 = 296 \text{ N}$$

que también es la fuerza ejercida por el muelle sobre la masa m_2.



Sobre m_2 actúan las siguientes fuerzas: 1) peso del bloque m_1 apoyado sobre ella, 2) peso de m_2, 3) fuerza ejercida por el muelle, F=296N, 4) reacción de la superficie, N. Los dos pesos están dirigidos hacia abajo, mientras que la reacción N está dirigida hacia arriba. La dirección de F depende, en cambio, de si el muelle se encuentra en fase de contracción o de alargamiento.

a) Cuando el muelle se contrae, F está dirigida hacia abajo. Por tanto, teniendo en cuenta que la masa m_2 permanece en reposo:

$$N - F - m_1 g - m_2 g = 0$$

En este caso, la reacción normal de la superficie alcanza su máximo valor:

$$N_{max} = F + (m_1 + m_2)g = 296 + (15 + 20)9{,}8 = 639 \text{ N}$$

Cuando el muelle se alarga, F está dirigida hacia arriba. Por tanto, teniendo en cuenta que la masa m_2 permanece en reposo:

$$N + F - m_1 g - m_2 g = 0$$

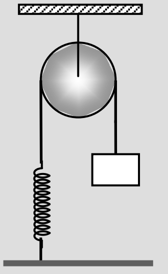
En este caso, la reacción normal de la superficie alcanza su mínimo valor:

$$N_{min} = -F + (m_1 + m_2)g = -296 + (15 + 20)9{,}8 = 47 \text{ N}$$

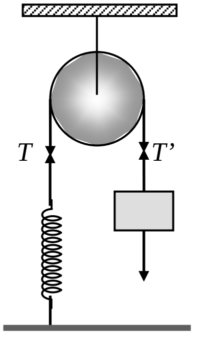
b) Para que el plano no soporte ninguna fuerza, debe cumplirse N_{min}=0. Es decir:

$$(m_1 + m_2)g = F' = m_1(2\pi f)^2 A' \quad \Rightarrow \quad A' = \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1(2\pi f)^2} = 0{,}023 \text{ m}$$

10. Un resorte vertical, de masa despreciable y constante *k*, tiene su extremo inferior fijado al suelo mientras que en su otro extremo lleva unido un hilo ideal. El hilo pasa por una polea de radio *R* y masa *M*, y lleva suspendido en su otro extremo un bloque de masa *m*. Determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento de la masa *m* alrededor de su posición de equilibrio, b) periodo de la oscilación, c) tensiones del hilo a cada lado de la polea.



[*Solución*: $T=2\pi[(M+2m)/2k]^{1/2}$, $F=mg+kA\cos(\omega t+\delta)$, $T'=mg+mA\omega^2\cos(\omega t+\delta)$] HH



En la situación de equilibrio, se verifica:

$$\left.\begin{aligned} T' &= mg \\ T &= kd \end{aligned}\right\} \Rightarrow (T - T')R = 0 \Rightarrow T = T' \Rightarrow mg = kd$$

Cuando m está separada una distancia x de su posición de equilibrio, se verifica:

Para muelle: $T = k(d+x)$

Para la masa: $ma = mg - T'$

Para la polea: $I\alpha = (T' - T)R$

La ecuación para la polea puede simplificarse aún más recordando el momento de inercia de un cilindro, $I=(1/2)MR^2$, y teniendo en cuenta que el hilo no resbala sobre la polea, $a=R\alpha$. Por tanto:

$$I\alpha = (T'-T)R \;\Rightarrow\; MR\alpha = 2(T'-T) \;\Rightarrow\; Ma = 2(T'-T)$$

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} T &= k(d+x) \\ ma &= mg - T' \\ Ma &= 2(T'-T) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T &= k(d+x) \\ (M+2m)a &= 2mg - 2T \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \ddot{x} = -\frac{2k}{M+2m}x$$

que es la ecuación diferencial del movimiento, y corresponde a un m.a.s.

b) Del resultado anterior tenemos que el periodo de la oscilación es:

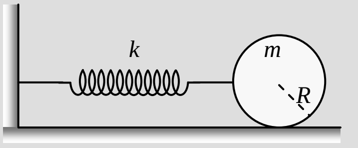
$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{M+2m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2k}}$$

c) Sabemos que el movimiento es de la forma $x=A\cos(\omega t+\delta)$. Por tanto:

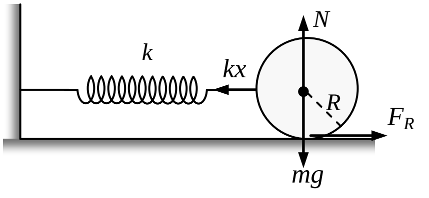
$$T = k(d+x) = mg + kA\cos(\omega t+\delta)$$

$$T' = mg - ma = mg + mA\omega^2\cos(\omega t+\delta)$$

11. Determinar la frecuencia de oscilación del sistema formado por un disco de masa *m* y radio *R* unido a un resorte de constante elástica *k*, suponiendo que la fuerza es tal que no existe deslizamiento del cilindro.



[Solución: $\omega^2=2k/3m$] H



Supongamos que separamos el muelle una distancia x respecto de su posición de equilibrio. El disco tenderá entonces a moverse con una aceleración a en sentido contrario al estiramiento del muelle.

Aplicando la segunda ley de Newton al disco en la dirección horizontal:

$$ma = F_R - kx$$

y aplicando la ecuación del movimiento de rotación:

$$-F_R R = I\alpha = I\frac{a}{R}$$

donde el signo menos indica que el sentido F_R es contrario al del movimiento.

Para un disco se cumple que $I=mR^2/2$. Por tanto:

$$-F_R R = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} \;\Rightarrow\; -F_R = \frac{1}{2}ma$$

Introducido este último resultado en la primera ecuación, tenemos:

$$ma = -\frac{1}{2}ma - kx \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}ma = -kx$$

Es decir:

$$a = -\frac{2k}{3m}x$$

que corresponde a un m.a.s. ($a=-\omega^2x$) con:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

Péndulo simple, físico y de torsión

Fórmulas básicas

Péndulo simple: $\omega = \sqrt{C} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Péndulo físico: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgD}{I}}$; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgD}}$

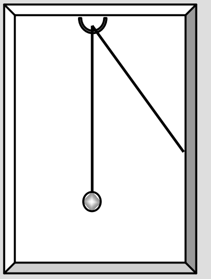
Longitud equivalente: $L_{eq} = \dfrac{I}{mD}$

Péndulo de torsión: $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{IK}}$; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{IK}$

Péndulo Físico: Estrategia para resolver problemas

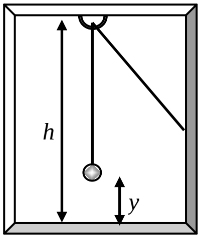
1. Comience identificando el punto de suspensión.
2. Calcule el momento de inercia del objeto respecto de un eje horizontal que pase por el punto de suspensión. Para ello, siga la estrategia ya estudiada en la lección 5. En ocasiones, el sólido suele tener una forma geométrica sencilla (cilindros, varillas, etc.) para la que el momento de inercia es conocido y no requiere ser calculado.
3. Calcule la posición del centro de masas del objeto siguiendo la estrategia estudiada en la lección 4. En ocasiones, la forma geométrica del sólido es muy sencilla y la posición del centro de masas es obvia, por lo que no requiere ser calculada.
4. Utilice la expresión de ω (o de T) para el péndulo físico (véase el cuadro superior) y despeje de ella la magnitud que nos piden calcular en el enunciado del problema.
5. Si también nos piden calcular la longitud equivalente del péndulo, basta aplicar la expresión $L_{eq}=I/mD$

12. Una pequeña esfera está suspendida de un hilo ideal encontrándose ésta a 14.2 cm del suelo. El hilo pasa a través de una arandela situada en el techo tal como se indica en la figura. Al hacer oscilar el sistema, observamos que tarda 5 min 45.4 s en realizar 50 oscilaciones completas. Tirando del otro extremo del hilo, subimos la esfera a 2.2 m del suelo, observando ahora que el tiempo empleado en realizar 50 oscilaciones es de 5 min 14 s.



Calcular la altura del techo y el valor de *g* en ese lugar

[*Solución*: 12 m, 9.81 m/s^2] H



El periodo de un péndulo simple viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{l / g}$$

En la primera medida del enunciado (con la masa a una distancia y_1=0,142 m del suelo), la longitud del hilo es (véase la figura):

$$l_1 = h - y_1$$

El tiempo que tarda en efectuar 50 oscilaciones es t_{50}=5 min 45,4 s=345,4 s. Por tanto, el tiempo correspondiente a una sola oscilación será el periodo:

$$T_1 = t_{50} / 50 = 345{,}4 / 50 = 6{,}91\,\mathrm{s}$$

En la segunda medida del enunciado (con la masa a una distancia y_1=2,2 m del suelo), la longitud del hilo es (véase la figura):

$$l_2 = h - y_2$$

Ahora se tiene que t_{50}=5 min 14s=314 s. Por tanto:

$$T_2 = t_{50} / 50 = 314 / 50 = 6{,}28\,\mathrm{s}$$

Sustituyendo estas longitudes y periodos en la expresión del periodo de un péndulo simple, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} T_1^2 &= 4\pi^2 \frac{h - y_1}{g} \\ T_2^2 &= 4\pi^2 \frac{h - y_2}{g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h &= \frac{y_2 (T_1 / T_2)^2 - y_1}{(T_1 / T_2)^2 - 1} = \frac{2{,}2 \cdot 1{,}1^2 - 0{,}142}{1{,}1^2 - 1} = 12\,\mathrm{m} \\ g &= 4\pi^2 \frac{h - y_2}{T_2^2} = 4\pi^2 \frac{12 - 2{,}2}{6{,}28^2} = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

13. Una varilla de 3 m de longitud y 1kg de masa oscila suspendida por un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Calcular: a) Periodo de las oscilaciones, b) Longitud equivalente del péndulo, c) Periodo de las oscilaciones si la varilla oscila alrededor del eje horizontal que pasa por la varilla a un cuarto de su longitud.

[*Solución*: a) 2.84 s, b) 2 m, c) 2.66 s] H

a) El péndulo físico de este problema está constituido por una varilla de longitud *l* que gira alrededor de un eje perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos. Su momento de inercia será entonces:

$$I = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3^2 = 3\,\text{kg m}^2$$

Por otra parte, la distancia *d* entre el punto de suspensión y el centro de masas viene dada por $d = l/2 = 3/2$ m.

Sustituyendo datos, el periodo del péndulo es:

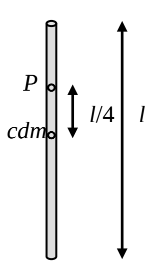
$$T = \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{1 \cdot 9{,}8 \cdot 3/2}} = 2{,}84\,\text{s}$$

b) Despejando *l* de la expresión del periodo de un péndulo simple, y sustituyendo *T* por el resultando anterior, se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{2{,}84^2 \cdot 9{,}8}{4\pi^2} = 2\,\text{m}$$

c) Para determinar el periodo del péndulo alrededor de otro eje, debemos conocer el momento de inercia respecto a dicho eje. Esto puede hacerse aplicando el teorema de Steiner: si I_0 es el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por el c.d.m., el momento de inercia *I* respecto a un eje paralelo al anterior pero situado a una distancia *a* del c.d.m. es: $I = I_0 + ma^2$. En nuestro caso:

$$I = \frac{1}{12} m l^2 + m(l/4)^2 = \frac{7}{48} m l^2$$



Como la distancia *d* es ahora igual a *l*/4, el nuevo periodo será:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{(7/48) m l^2}{mg(l/4)}} = 2\pi\sqrt{\frac{7 \cdot 3 \cdot 4}{48 \cdot 9{,}8}} = 2{,}66\,\text{s}$$

14. Una recta material de 298 cm de longitud tiene su densidad proporcional a la distancia a uno de sus extremos. Calcular el periodo del péndulo físico que resulta suspendiéndola de aquel extremo.

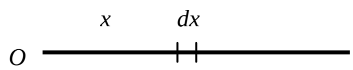
[*Solución*: 3 s] HH

En este caso, el péndulo está constituido por una varilla de longitud *l* y densidad variable. Para hallar el periodo, necesitamos calcular el momento de inercia *I*, la masa de la varilla *m*, y la distancia *d*.

Tomamos el sistema de referencia con el origen en el extremo menos denso de la varilla y con el eje *X* coincidiendo con la dirección de ésta. La densidad es entonces:

$$\rho = kx$$

Para calcular la masa total de la varilla, consideramos que está constituida por infinitos elementos de longitud *dx*. La masa *dm* de cada elemento será entonces:



$$dm = \rho dx = kxdx$$

e integrando:

$$m = k\int_0^l xdx = \frac{1}{2}kl^2$$

Por otra parte, el momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por el extremo O, será:

$$I = \int_0^l x^2 dm = k\int_0^l x^3 dx = \frac{1}{4}kl^4$$

y la distancia *d* entre el centro de masas y el punto de suspensión:

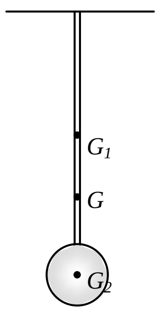
$$d = \frac{1}{m}\int_0^l xdm = \frac{k\int_0^l x^2 dx}{\frac{1}{2}kl^2} = \frac{l^3/3}{l^2/2} = \frac{2}{3}l$$

Sustituyendo en la expresión del periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{4}kl^4}{(\frac{1}{2}kl^2)g\,\frac{2}{3}l}} = \pi\sqrt{\frac{3l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{3\cdot 2.98}{9.8}} = 3\,\mathrm{s}$$

15. El péndulo de un reloj de pared está formado por una varilla de 1 m de longitud y masa m_1=m en cuyo extremo hay soldado un cilindro macizo y homogéneo de masa m_2=3m. Calcular el valor del radio del cilindro para que el periodo del péndulo sea de 2 s. (Tómese g=π^2)

[*Solución*: 4,5 cm] HH



El periodo de un péndulo físico viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

siendo d la distancia entre el cdm y el punto de suspensión.

Puesto que las posiciones del cdm de la varilla y del cilindro son obvias, podemos calcular la posición (respecto a O) del cdm de todo el péndulo mediante:

$$d = OG = \frac{m_1 \frac{L}{2} + m_2 (L+R)}{m_1 + m_2} = \frac{m \frac{L}{2} + 3m(L+R)}{4m} = \frac{7L + 6R}{8}$$

Por otra parte, el momento de inercia del conjunto es I=I_1+I_2, donde:

$$I_1 = \frac{1}{3} m_1 L^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (L+R)^2 = \frac{3}{2} mR^2 + 3m(L+R)^2$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{3} mL^2 + 3m\left[\frac{R^2}{2} + (L+R)^2\right] = m\left[\frac{L^2}{3} + \frac{3R^2}{2} + 3(L+R)^2\right]$$

y

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\left[\frac{L^2}{3} + \frac{3R^2}{2} + 3(L+R)^2\right]}{4mg(7L+6R)/8}} = 2$$

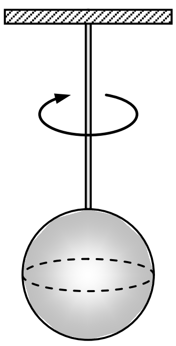
de donde (con L=1 m):

$$27R^2 + R(36L - 18) + L(20L - 21) = 0 \quad \Rightarrow \quad 27R^2 + 18R - 1 = 0$$

$$R = \ 4{,}5 \text{ cm}$$

16. Un péndulo de torsión está formado por una esfera suspendida de un alambre de 1 mm de radio y 1 m de longitud. La esfera tiene 10 cm de radio y 400 g de masa y, cuando la giramos respecto al eje vertical, el periodo de la oscilación resultante es de 2 s. Calcular el módulo de rigidez del alambre

[*Solución*: 10^{10}N/m^2] HH



Para pequeñas deformaciones, el ángulo de torsión, φ, es proporcional al momento de fuerzas aplicado τ_a:

$$\varphi = \frac{1}{K}\tau_a$$

A este momento de fuerzas τ_a, se opondrá un momento de fuerzas de restitución elástica τ

$$\varphi = -\frac{1}{K}\tau$$

que seguirá actuando al cesar de aplicar τ_a .

En el caso de un objeto cilíndrico, la constante *K* viene dada por:

$$K = \gamma\frac{r^4}{L} = \frac{\pi G}{2}\frac{r^4}{L}$$

Por tanto:

$$\tau = -\frac{\pi G r^4}{2L}\varphi = -K\varphi \;\Rightarrow\; \ddot{\varphi} = -(K/I)\varphi$$

que implica un m.a.s. en el ángulo de torsión cuyo periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

siendo *I* el momento de inercia de una esfera respecto a uno de sus diámetros:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Sustituyendo en *T* las expresiones para *I* y *K*, se obtiene:

$$T = \frac{4\pi R}{r^2}\sqrt{\frac{ML}{5\pi G}}$$

Es decir:

$$G = \frac{16\pi R^2 ML}{5r^4T^2} = \frac{16\pi\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}4\cdot 1}{5\cdot(1\cdot 10^{-3})^4\cdot 2^2} = 10^{10}\ \text{N/m}^2$$

Trabajo y energía de las oscilaciones

Fórmulas básicas

Energía cinética de un m.a.s.: $E_c = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

Energía potencial: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$

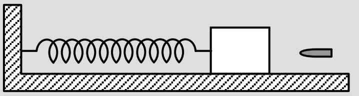
Energía mecánica total : $E_T = \frac{1}{2}kA^2$

Trabajo realizado por una fuerza elástica : $W = -\Delta E_p$

Trabajo y energía de las oscilaciones: Estrategia para resolver problemas

1. Defina la partícula o sistema que desea estudiar e identifique todas las fuerzas que actúan sobre ella.
2. Distinga qué fuerzas son conservativas (peso, fuerzas elásticas,...) y qué fuerzas son no conservativas (rozamientos,...)
3. Escoja una posición de referencia para el punto cero de energía potencial gravitatoria. Haga lo mismo para el punto cero de energía potencial elástica.
4. Escriba las expresiones de la energía mecánica (cinética más potencial gravitatoria, más potencial elástica...) en la situación inicial, E_i, y final, E_f.
5. Si todas las fuerzas son conservativas (no hay rozamiento) la energía mecánica debe ser constante. Iguale las energías mecánicas inicial y final $E_i = E_f$, y despeje la incógnita
6. Si existen fuerzas no conservativas (rozamiento) la energía mecánica no es constante. Calcule el trabajo realizado para vencer esas fuerzas no conservativas, W_{nc}. Puesto que la variación de energía mecánica es debida a la energía disipada por las fuerzas no conservativas, iguale $W_{nc} = \Delta E_m = E_f - E_i$ y despeje la incógnita

17. Una bala de 25 g choca contra el bloque de 2975 g mostrado en la figura, y se incrusta en él. Si la frecuencia de la oscilación resultante es de 8/π Hz y su amplitud es de 50 cm, hallar:



a) Velocidad y aceleración máximas que alcanza el sistema después del choque, b) Velocidad de la bala antes de la colisión, c) Trabajo efectuado por la bala para incrustarse en el bloque

[*Solución*: a: 8 m/s, 128 m/s^2; b: 960 m/s; c: 11519 J] H

a) La masa oscilante es el conjunto bloque+bala. Puesto que conocemos la frecuencia (8/π Hz) y la amplitud de las oscilaciones (0.5 m), podemos deducir:

La frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 8/\pi = 16 \text{ rad/s}$$

la velocidad máxima del conjunto:

$$v_m = A\omega = 0{,}5 \cdot 16 = 8 \text{ m/s}$$

y la aceleración máxima:

$$a_m = A\omega^2 = 0{,}5 \cdot 16^2 = 128 \text{ m/s}^2$$

b) El choque de la bala es completamente inelástico. Por tanto, aplicando la conservación de la cantidad de movimiento entre los instantes inmediatamente anterior y posterior al choque, se obtiene:

$$mv = (M + m)v_m$$

Despejando v y sustituyendo datos:

$$v = \frac{M + m}{m} v_m = \frac{3}{0{,}025} 8 = 960 \text{ m/s}$$

c) Aplicando el teorema de trabajo-energía, el trabajo efectuado *sobre* la bala el incrustarse en el bloque será:

$$W = \Delta E_c = E_c^{final} - E_c^{inicial} = \frac{1}{2} m(v_m^2 - v^2)$$

Sustituyendo datos:

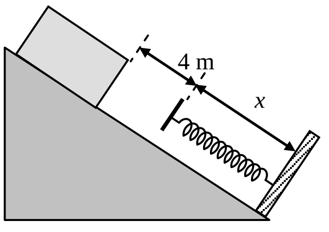
$$W = \frac{1}{2} 0.025(8^2 - 960^2) = -11519 \text{ J}$$

y, por tanto, el trabajo realizado *por* la bala es:

$$W_{bala} = -W = 11519 \text{ J}$$

18. Un bloque de 0.5 kg se encuentra sobre un plano inclinado 45°. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es de 0.1. El bloque parte del reposo y, tras deslizar 4 m, choca con un muelle de constante k=400 N/M cuyo extremo más alejado está fijo al final del plano. a) ¿Cuál es la máxima deformación del muelle?, b) ¿Qué altura alcanzará el bloque tras chocar por primera vez con el muelle?

[*Solución*: a) 26 cm, b) 3,29 m] H



a) Llamemos x a la deformación del resorte y tomemos la posición más baja del bloque como origen de energías potenciales. Aplicando $W_{Fr}=\Delta E_{mec}$, podremos establecer la igualdad:

$$-\mu mg\cos\alpha(4+x)=\frac{1}{2}kx^2-mgh$$

siendo:

$$h=(4+x)\,\text{sen}\,45=(4+x)(\sqrt{2}/2)$$

Por tanto

$$0{,}5\cdot 9{,}8\cdot(4+x)\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}1\cdot 0{,}5\cdot 9{,}8\frac{\sqrt{2}}{2}(4+x)+\frac{1}{2}400x^2$$

es decir

$$200x^2-3{,}12x-12{,}47=0$$

que es una ecuación de segundo grado. Considerando únicamente la solución positiva:

$$x=0{,}26\text{ m}=26\text{ cm}$$

b) Llamando d a la distancia, y aplicando de nuevo que $W_{Fr}=\Delta E_{mec}$, tenemos:

$$-\mu mg\cos\alpha(d+x)=mgh'-\tfrac{1}{2}kx^2$$

siendo $h'=(d+x)\,\text{sen}\,\alpha$. Por tanto:

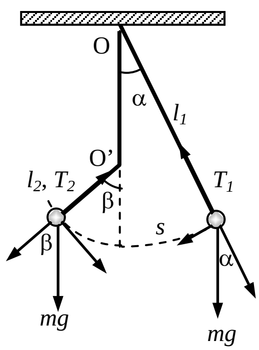
$$\tfrac{1}{2}kx^2=\mu mg\cos\alpha(d+x)+mg(d+x)\,\text{sen}\,\alpha$$

y, despejando d:

$$d=\frac{\tfrac{1}{2}kx^2-mgx(\mu\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)}{mg(\mu\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)}=3{,}29\text{ m}$$

19. Un péndulo está constituido por una partícula de masa *m*=200g suspendida de un hilo ideal de 2m de longitud. Desplazamos el péndulo, respecto de su posición de equilibrio, hasta elevar la partícula 20 cm por encima de su posición de equilibrio. a) Calcular su velocidad, energía cinética y tensión cuando pase por la vertical, b) Supongamos que al pasar por la vertical, el hilo encuentra un clavo O' situado 1 m por debajo del punto de suspensión O. Calcular las tensiones del hilo en sus posiciones extremas, c) Calcular el periodo del péndulo, tal como se describe en el apartado anterior, para pequeñas amplitudes. Tómese *g*=10 m/s²

[*Solución*: a) 2 m/s, 0.4 J, b) 1.8 N, 1.6 N, c) 2.4 s] H



a) Puesto que la energía mecánica debe conservarse (ya que W_T=0), la energía potencial inicial debe ser igual a la energía cinética cuando la masa pasa por la posición de equilibrio. Por tanto:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}2} = 2 \text{ m/s}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}0{,}2\cdot 2^2 = 0{,}4 \text{ J}$$

y la tensión de hilo será:

$$T = mg + F_c = mg + m\frac{v^2}{l_1} = 2{,}4 \text{ N}$$

b) Suponiendo que en el choque no hay pérdida de energía, la energía potencial en el extremo de la derecha debe ser igual a la energía potencial en el extremo izquierdo. Por tanto, la partícula se elevará la misma altura vertical de 20 cm en ambos lados. Los ángulos mostrados en la figura serán entonces:

$$h = l_1 - l_1\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = (l_1 - h)/l_1 = 1{,}8/2 = 0{,}9$$
$$h = l_2 - l_2\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = (l_2 - h)/l_2 = 0{,}8/1 = 0{,}8$$

y las tensiones del hilo en las posiciones extremas:

$$T_1 = mg\cos\alpha = 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}9 = 1{,}8 \text{ N}$$
$$T_2 = mg\cos\beta = 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}8 = 1{,}6 \text{ N}$$

c) Los periodos correspondientes a péndulos de longitud l_1=2m, y l_2=1m, son:

$$T' = 2\pi\sqrt{l_1/g} = 2{,}8 \text{ s}, \qquad T'' = 2\pi\sqrt{l_2/g} = 2 \text{ s},$$

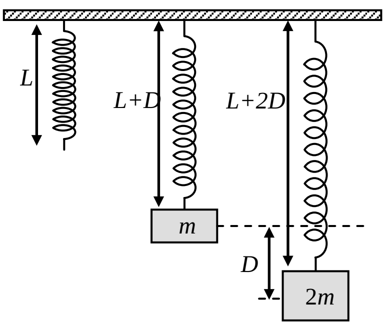
Por tanto, el periodo del péndulo descrito en el apartado anterior será:

$$T = T'/2 + T''/2 = 1{,}4 + 1 = 2{,}4 \text{ s}$$

20. Un resorte libre tiene longitud *L*. Cuando se sujeta por un extremo y se cuelga en el otro una masa *m* adquiere una longitud *L*+*D*. Mientras la masa *m* está colgada sin movimiento, se deja caer una segunda masa *m* igual sobre la primera desde una altura *D* y choca con ella inelásticamente. Encontrar el periodo, amplitud y altura máxima sobre la posición inicial de equilibrio de la primera masa, que corresponden al movimiento resultante

[*Solución*: $T = 2\pi\sqrt{2D/g}$, $A = D\sqrt{2}$, $h = D(\sqrt{2}-1)$] HH

Podemos calcular la constante del muelle usando el hecho de que, al colgar la primera masa, el muelle alcanza el equilibrio descendiendo una distancia *D*. Por tanto:



$$kD = mg$$

es decir

$$k = \frac{mg}{D}$$

Puesto que *k* es una constante, cuando la masa suspendida sea 2*m*, el muelle alcanzará el equilibrio descendiendo una distancia 2*D* respecto a la longitud del resorte libre.

Al tener las dos masas unidas M_T=2*m*, el periodo del m.a.s. resultante es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M_T}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{mg/D}}$$

Es decir:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2D}{g}}$$

Para calcular la velocidad de ambas masas después del choque, aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento total del sistema:

$$m\sqrt{2gD} + 0 = (m+m)v$$

y despejando la velocidad *v* del conjunto

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{2gD} = \sqrt{\frac{gD}{2}}$$

Tenemos pues un muelle de constante conocida con una masa $2m$ en su extremo. Sabemos que la nueva longitud de equilibrio es $L+2D$, y conocemos la velocidad de al pasar por un determinado punto: el situado a una distancia D por encima de esa posición de equilibrio.

Puesto que el movimiento es periódico, el módulo de la velocidad será siempre el mismo en ese punto. Por tanto, la energía cinética al pasar por él será:

$$E_c = \frac{1}{2} M_T v^2 = \frac{1}{2} 2m \frac{gD}{2} = \frac{1}{2} mgD$$

Puesto que el mencionado punto se encuentra a una distancia D de la nueva posición de equilibrio, la energía potencial al pasar por él será:

$$E_p = \frac{1}{2} kD^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{D} D^2 = \frac{1}{2} mgD$$

Por tanto, la energía total vale:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} mgD + \frac{1}{2} mgD = mgD$$

Cuando llegue a su posición más alta (o más baja), toda su energía será potencial. Por tanto, llamando A a la amplitud:

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \quad \Rightarrow \quad mgD = \frac{1}{2} \frac{mg}{D} A^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 2D^2$$

es decir

$$A = D\sqrt{2}$$

que es la amplitud del movimiento resultante pedida en el enunciado del problema.

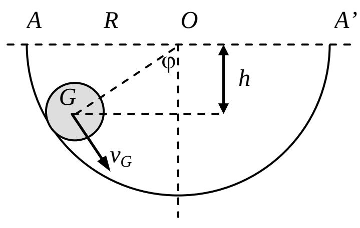
La altura máxima sobre la posición inicial de equilibrio será entonces:

$$h = A - D = D\sqrt{2} - D = D(\sqrt{2} - 1)$$

Obsérvese que es menor que D ya que el choque es inelástico y se ha perdido en él una parte de energía mecánica.

21. Hallar el periodo de las pequeñas oscilaciones de un cilindro de radio *r* que rueda sin deslizar por el interior de una superficie cilíndrica de radio *R*.

[*Solución*: $T = 2\pi\sqrt{3(R-r)/(2g)}$] HH



Tomando la línea AA' como el origen de energías potenciales, la energía total del cilindro que rueda, en función del ángulo φ que forma OG con la vertical, será:

$$E_T = -mg(R-r)\cos\varphi + \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2$$

donde

$$v_G = (R-r)\frac{d\varphi}{dt}; \qquad \omega = \frac{v_G}{r} = \frac{R-r}{r}\frac{d\varphi}{dt}$$

Cuando el ángulo φ es pequeño, podemos aproximar: $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Por tanto:

$$E_T = -mg(R-r)\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{(R-r)^2}{r}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Derivando esta última igualdad teniendo en cuenta que E_T=const (ya que W_N=0 y, puesto que rueda sin deslizar, W_{Fr}=0), tendremos

$$0 = -mg(R-r)\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}m(R-r)^2\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m(R-r)^2\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Simplificando

$$-g\varphi = \left[\frac{1}{2}(R-r) + (R-r)\right]\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad -g\varphi = \frac{3}{2}(R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

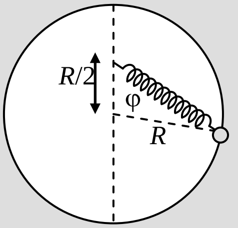
es decir:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2g}{3(R-r)}\varphi$$

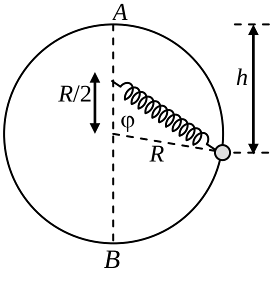
que es la ecuación de un m.a.s. de periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

22. Un móvil de masa *m* gira en el exterior de un círculo vertical de radio *R* y se mueve por la acción de la gravedad y de un resorte de constante *K*, que está sin tensión cuando el móvil se encuentra en la parte superior del círculo, a) Hallar la energía potencial del móvil en función del ángulo φ, b) ¿Qué energía cinética mínima debe tener en la posición superior para que recorra todo el círculo?.



[*Solución*: $E_p = -mgR(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}KR^2\left(\frac{3}{2} - \cos\varphi - \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\varphi}\right)$] HH



a) El móvil se desplaza por la acción de la gravedad y de la fuerza recuperadora del muelle. Su energía potencial será entonces la suma de las energías potenciales correspondientes a ambas fuerzas, referidas al mismo origen. Tomando la altura de A como nivel cero de energía potencial gravitatoria (posición φ=0) tenemos:

$$E_{pg} = -mgh = -mg(R - R\cos\varphi) = -mgR(1-\cos\varphi)$$

Para hallar la energía potencial elástica, debemos conocer la longitud del muelle cuando se encuentra en una posición cualquiera. Aplicando el teorema del coseno al triángulo formado por el muelle, y por los segmentos de longitudes R y $R/2$ tenemos:

$$l^2 = (R/2)^2 + R^2 - 2R(R/2)\cos\varphi$$

Puesto que la longitud en reposo del muelle vale $R/2$, el estiramiento del muelle será $x = l - R/2$, y su energía potencial vendrá dada por:

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K[l-(R/2)]^2 = \frac{1}{2}KR^2\left((3/2) - \cos\varphi - \sqrt{(5/4)-\cos\varphi}\right)$$

La energía potencial total será entonces:

$$E_p = E_{pg} + E_{pe} = -mgR(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}KR^2\left((3/2) - \cos\varphi - \sqrt{(5/4)-\cos\varphi}\right)$$

b) Para que recorra todo el camino, su energía cinética en el punto más bajo debe ser mayor que cero. Como el campo de fuerzas es conservativo (pues W_N=0), $E_{cA}+E_{pA} = E_{cB}+E_{pB}$. El mínimo de E_{cA} corresponderá a E_{cB}=0. Es decir:

$$E_{cA}^{min} = E_{pB} - E_{pA} = E_p^{\varphi=\pi} - E_p^{\varphi=0} = \left[-2mgR + \tfrac{1}{2}KR^2\left((3/2)+1-\sqrt{(5/4)+1}\right)\right] - [0]$$

$$E_{cA}^{min} = -mg2R + \frac{1}{2}KR^2$$

23. Si la masa m_S de un resorte no es despreciable en comparación con la masa *m* del objeto que oscila en su extremo, demostrar que el periodo del movimiento armónico resultante es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+(m_S/3)}{K}}$$

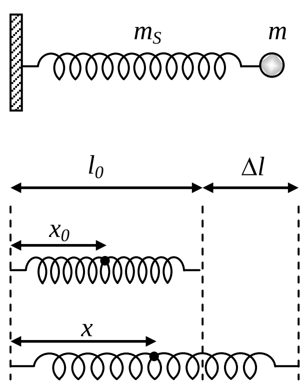
(*Ayuda*: Suponga que el estiramiento del muelle es uniforme y calcule, por integración, la energía potencial del muelle masivo estirado. Compare el resultado con la energía potencial de un muelle ideal.)

HH

Un muelle de masa m_S oscila sin que pongamos masa en su extremo. Por tanto, m_S contribuye a la energía potencial total del muelle. Podemos calcular dicha energía potencial como la suma de dos contribuciones: la debida a la masa puntual situada en su extremo, U_1, y la producida por la propia masa del muelle, U_2.

$$U = U_1 + U_2$$

donde el término debido a la masa puntual tiene una expresión conocida:



$$U_1 = \frac{1}{2}\omega^2 m(\Delta l)^2$$

Calculemos ahora la contribución, U_2, de la masa del muelle Para ello, consideremos el muelle como infinitos elementos de longitud infinitesimal, oscilando con diferentes amplitudes (mayores cuanto más lejanas del extremo fijo) y todas con la misma frecuencia angular ω.

Si llamamos *dm* a la masa infinitesimal de un elemento, su constante recuperadora será:

$$dk = \omega^2 dm$$

Por otra parte, si llamamos *x* a la posición del elemento cuando el muelle se encuentra estirado, y x_0 a su posición con el muelle sin estirar, la separación respecto a la posición de equilibrio es $(x - x_0)$. Por tanto, su energía potencial vendrá dada por:

$$dU_2 = \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2\, dk = \tfrac{1}{2}\omega^2 (x - x_0)^2\, dm$$

Llamando $\rho=m_S/(l_0+\Delta l)$ a la densidad lineal del muelle estirado, tenemos que:

$$dm = \rho dx = \frac{m_S}{l_0 + \Delta l} dx$$

y suponiendo que el alargamiento es uniforme:

$$\frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \frac{x}{x_0}$$

tenemos:

$$dU_2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 (x - x_0)^2 \frac{m_S}{l_0 + \Delta l} dx = \tfrac{1}{2}\omega^2 (x - \frac{l_0}{l_0 + \Delta l} x)^2 \frac{m_S}{l_0 + \Delta l} dx$$

es decir,

$$dU_2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 m_S \frac{\Delta l}{(l_0 + \Delta l)^3} x^2 dx$$

Integrando:

$$U_2 = \int_0^{l_0+\Delta l} \tfrac{1}{2}\omega^2 m_S \frac{\Delta l}{(l_0 + \Delta l)^3} x^2 dx = \frac{\omega^2 m_S}{6}(\Delta l)^2$$

La energía potencial del muelle es, por tanto:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\omega^2 m(\Delta l)^2 + \frac{\omega^2 m_S}{6}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\left(m + \frac{m_S}{3}\right)(\Delta l)^2$$

que, comparado con la expresión habitual de la energía potencial elástica

$$U = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

Implica que el muelle masivo es equivalente a un muelle ideal de constante:

$$k = \omega^2\left(m + \frac{m_S}{3}\right)$$

o bien

$$k = (2\pi / T)^2\left(m + \frac{m_S}{3}\right)$$

Despejando T se obtiene finalmente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + (m_S / 3)}{k}}$$

que es la relación buscada

Oscilaciones amortiguadas y forzadas

Fórmulas básicas

Ecuación diferencial del movimiento: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega_e t)$

Movimiento oscilatorio amortiguado : $x = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \delta)$

Frecuencia angular del movimiento amortiguado: $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (b/b_c)^2}$

Amortiguamiento crítico: $b_c = 2m\omega_0$

Decremento logarítmico: $\Delta = \ln\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right) = \dfrac{bT}{2m} = \dfrac{\pi b}{m\omega}$

Constante de tiempo: $\tau = m/b$

Factor de calidad: $Q = \tau\omega_0 = m\omega_0/b$

Movimiento forzado (solución estacionaria): $x = A\cos(\omega_e t - \delta)$

donde: $A = \dfrac{F_0}{\sqrt{(b\omega_e)^2 + [m(\omega_0^2 - \omega_e^2)]^2}}$; $\mathrm{tg}\delta = \dfrac{b\omega_e}{k - m\omega_e^2} = \dfrac{b\omega_e}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)}$

Oscilaciones amortiguadas y forzadas: Estrategia para resolver problemas

1. En un oscilador amortiguado debe existir, además de una fuerza recuperadora $-kx$, otra fuerza (o conjunto de fuerzas) de la forma $-bv = -b\dot{x}$. Identifique tales fuerzas y escriba la fuerza total $ma = m\ddot{x}$ en la forma: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$. La ecuación diferencial del movimiento será entonces $\ddot{x} = -(k/m)x - (b/m)\dot{x}$.

2. Si los desplazamientos del oscilador son angulares, en lugar de lineales, trate de encontrar una ecuación del movimiento similar a la anterior pero referida a ángulos: $\ddot{\varphi} = -(k/m)\varphi - (b/m)\dot{\varphi}$. Para ello, si el movimiento es circular, suele ser útil recurrir a relaciones como $x = R\varphi$. En el caso de sólidos rígidos, es preferible calcular el momento de fuerzas total, τ, y aplicar la relación $\tau = I\ddot{\varphi}$.

3. Una vez obtenida la ecuación diferencial del movimiento, la frecuencia natural corresponde a la raíz cuadrada del factor que multiplica al término en x (o en φ): $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. El factor de amortiguamiento se obtendrá en cambio a partir de la constante que multiplica a $\dot{x}$

4. El resto de constantes o propiedades podrá entonces ser calculado por aplicación directa de las fórmulas correspondientes, o analizando las condiciones iniciales (como en un m.a.s.)

24. Una partícula de masa *m* está sometida a un movimiento libre amortiguado. Sabiendo que el coeficiente de amortiguamiento es igual a la mitad del crítico y que el valor de la frecuencia natural es ω_0= 2 rad/s. Determinar: a) La ecuación de la oscilación en función del tiempo y de las constantes A_0 y δ, b) Las constantes A_0 y δ, sabiendo que inicialmente x_0=1 cm y v_0 = (√3 – 1) cm/s, c) El decremento logarítmico.

[*Solución*: a) $x=A_0\,e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t+\delta)$, b) √2 cm, -π/4, c) 2π/√3] H

a) Puesto que ω_0=2 rad/s y el coeficiente de amortiguamiento es la mitad del valor crítico, tenemos:

$$b = b_c / 2 = (2m\omega_0)/2 = m\omega_0 = 2m$$

La frecuencia de la oscilación será entonces:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-(b/b_c)^2} = 2\sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}\ \text{rad/s}$$

y la ecuación del movimiento:

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t}\cos(\omega t+\delta) = A_0 e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t+\delta)$$

b) Inicialmente (t=0), la elongación vale x_0=1 cm:

$$1 = A_0 e^{-0}\cos(\sqrt{3}\cdot 0+\delta) = A_0\cos(\delta)$$

Por otra parte:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A_0 e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t+\delta)] = -A_0 e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t+\delta) - A_0 e^{-t}\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\,t+\delta)$$

y, puesto que la velocidad inicial es v_0 = (√3 – 1) cm/s:

$$\sqrt{3}-1 = -A_0\cos(\delta) - A_0\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\delta) = -1 - A_0\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\delta)$$

$$1 = -A_0\,\mathrm{sen}(\delta)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones constituido por $1=A_0\cos\delta$ y $1=-A_0\mathrm{sen}\delta$:

$$A_0 = \sqrt{2}\ \text{cm}, \qquad \mathrm{tg}\,\delta = -1/1 \Rightarrow \delta = -\pi/4$$

c) El decremento logarítmico es:

$$\Delta = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{bT}{2m} = \frac{\pi b}{m\omega} = \frac{\pi(2m)}{m\sqrt{3}} = 2\pi/\sqrt{3}$$

25. Un objeto de masa *m* está suspendido de un muelle cuya constante elástica es *k* en un medio que se opone al movimiento con una fuerza opuesta a la velocidad y proporcional a ella. Experimentalmente se ha determinado la frecuencia de las oscilaciones, encontrándose que ésta es √3 /2 veces mayor que si no existiera amortiguamiento. Determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento, b) La frecuencia natural del sistema, c) El coeficiente de amortiguamiento, d) El factor de calidad, e) El decremento logarítmico

[*Solución*: a) $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$, b) $\sqrt{k/m}$, c) $\sqrt{km}$, d) 1, e) $2\pi/\sqrt{3}$] H

a) Se trata de un movimiento oscilatorio amortiguado en el que conocemos la masa *m*, y la constante *k*,

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

donde *b* es el coeficiente de amortiguamiento, y *x* expresa distancias respecto a la posición de equilibrio del muelle (estirado por efecto del peso *mg* del objeto).

b) La frecuencia natural ω_0 es la que presentaría el sistema si no existiera amortiguamiento (b=0). En tal caso:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -(k/m)x \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

c) La frecuencia de la oscilación viene dada por

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$$

o bien, puesto que según el enunciado $\omega' = \sqrt{3}/2\ \omega_0$:

$$\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{b}{m}$$

Sustituyendo el resultado del apartado (b):

$$\sqrt{k/m} = b/m \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{mk}$$

d) El factor de calidad es:

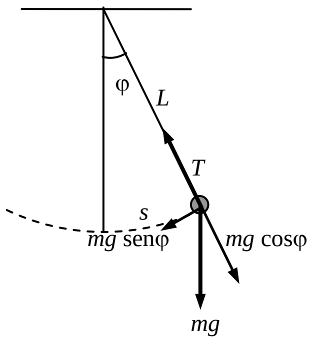
$$Q = \tau\omega_0 = m\omega_0 / b = m(b/m)/b = 1$$

e) El decremento logarítmico es:

$$\Delta = \frac{\pi b}{m\omega'} = \frac{\pi b}{m(\sqrt{3}/2)\omega_0} = \frac{\pi b}{m(\sqrt{3}/2)(b/m)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

26. Un péndulo está formado por una masa puntual *m* suspendida de un punto fijo mediante un hilo ideal de longitud *l*. Sobre la masa en movimiento actúa una fuerza proporcional a la velocidad y opuesta a ella. Determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento para pequeñas oscilaciones, b) La frecuencia natural del péndulo, c) El coeficiente de proporcionalidad de la fuerza de rozamiento para que el movimiento fuese no oscilatorio crítico, siendo *m*=48 g y *l*=1m.

[*Solución*: a) $\ddot{\varphi} = -(g/L)\varphi - (b/m)\dot{\varphi}$, b) $\sqrt{g/L}$, c) 0.3 kg/s] H



a) Sabemos que, para un péndulo no amortiguado, la fuerza neta sobre la masa puntual es $-mg$senφ. Si, además, existe una fuerza proporcional y opuesta a la velocidad, tendremos:

$$m\ddot{s} = -mg \operatorname{sen} \varphi - b\dot{s}$$

o bien, teniendo en cuenta que $s=L\varphi$:

$$mL\ddot{\varphi} = -mg \operatorname{sen} \varphi - bL\dot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \varphi - \frac{b}{m}\dot{\varphi}$$

Si las oscilaciones son pequeñas, podemos aproximar senφ=φ y, por tanto:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\varphi - \frac{b}{m}\dot{\varphi}$$

que corresponde a un oscilador amortiguado.

b) Una vez obtenida la ecuación diferencial del oscilador amortiguado, sabemos que la frecuencia natural corresponde a la raíz cuadrada del factor que multiplica al término que no contiene derivadas:

$$\omega_0 = \sqrt{g/L}$$

c) El amortiguamiento crítico corresponde al caso en que $b = b_c = 2m\omega_0$. En nuestro caso:

$$b = b_c = 2m\omega_0 = 2m\sqrt{\frac{g}{L}} = 2 \cdot 0{,}048\sqrt{\frac{9{,}8}{1}} = 0{,}3\,\text{kg/s}$$

27. Una masa de 100 g tiene un movimiento oscilatorio amortiguado de frecuencia natural 100Hz y decremento logarítmico 10^{-2}. Determinar la expresión de la fuerza armónica que debemos aplicar para que el sistema entre en resonancia con una amplitud de 1 cm

[*Solución*: $F_e=\pi\cos(200\pi t)$] HH

Se trata de un oscilador forzado y amortiguado en el que, según el enunciado, la fuerza externa adicional es armónica:

$$F_e=F_0\cos(\omega_e t)$$

El problema consiste en determinar los valores de F_0 y ω_e. Para ello, recordemos que la solución estacionaria de este tipo de movimiento es:

$$x = A\cos(\omega_e t-\delta)$$

con

$$A=\frac{F_0}{\sqrt{(b\omega_e)^2+[m(\omega_0^2-\omega_e^2)]^2}}$$

Puesto que el decremento logarítmico tiene un valor muy bajo, podemos considerar que las oscilaciones son sólo ligeramente amortiguadas. Es decir, podemos considerar que, antes de aplicar la fuerza externa, la frecuencia del oscilador amortiguado es prácticamente igual a la frecuencia natural: $\omega\approx\omega_0$. Además, podemos considerar que la resonancia ocurre cuando $\omega_e=\omega_0$. Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia externa serán:

$$\Delta=\frac{\pi b}{m\omega_0}=\frac{b}{2m\nu_0}\Rightarrow b=2m\nu_0\Delta=2\cdot 0{,}1\cdot 100\cdot 0{,}01=0{,}2\ \text{kg/s}$$

$$\omega_e=\omega_0=2\pi\nu_0=200\pi\ \text{rad/s}$$

mientras que la amplitud de la fuerza externa vendrá dada por:

$$A=\frac{F_0}{\sqrt{(b\omega_e)^2+[m(\omega_0^2-\omega_e^2)]^2}}=\frac{F_0}{b\omega_0}\Rightarrow F_0=Ab\omega_0=0{,}025\cdot 0{,}2\cdot 200\pi=\pi\ \text{N}$$

Por tanto:

$$F_e=F_0\cos(\omega_e t)=\pi\cos(200\pi t)$$

en unidades del S.I.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Cinemática del movimiento armónico simple

1. Una partícula está situado en el extremo de un oscilador que pasa por su posición de equilibrio con una velocidad de 2 m/s. La amplitud es de 10^{-3} m. a) ¿Cuál es la frecuencia y el periodo del oscilador?, b) ¿Cuál es su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo? [*Solución*: a) 318,3 Hz, $3{,}14\cdot10^{-3}$ s, b) $10^{-3}\cos(2000t+\delta)$, $-2\,\mathrm{sen}(2000t+\delta)$, $-4000\cos(2000t+\delta)$]

2. Un punto material realiza un movimiento que responde a la ecuación $a+16x=0$, donde a es la aceleración del movimiento. Determinar: a) tiempo que transcurre para que el punto se desplace desde la posición x=2 m hasta x=4 m, si el valor máximo que puede alcanzar x es de 8 m, y cuando $t=0$ $\Rightarrow x=0$; b) velocidad máxima que puede alcanzar dicho punto material [*Solución*: a) 0,068 s, b) 32 m/s]

Dinámica del movimiento armónico simple

3. Un pequeño objeto de masa 2 kg cuelga sin vibrar del extremo de un resorte de constante elástica k=500 N/m sujeto al techo de un ascensor. Este inicia el movimiento hacia arriba con una aceleración de $g/3$ y de repente se detiene. Determinar: a) la frecuencia angular de la oscilación del objeto después de que cesa la aceleración; b) el aumento de longitud del resorte mientras se encuentra acelerado el ascensor; c) la amplitud de la oscilación y el ángulo de fase inicial visto por una persona que estaba en el ascensor. [*Solución*: a) 15,81 rad/s, b) 0,052 m, c) 0,013 m, 180º]

4. Un platillo oscila verticalmente con un movimiento vibratorio armónico de amplitud A. Determinar la máxima frecuencia de oscilación posible sin que se separe del platillo un cuerpo colocado encima de él [*Solución*: $\omega=(g/A)^{1/2}$]

5. Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones de una barra homogénea de longitud $2l$, masa m, que se apoya sin rozamiento en la superficie interior de un cilindro de radio R, permaneciendo constantemente en un plano perpendicular al eje del cilindro [*Solución*: $T^2=4\pi^2(3R^2-2L^2)/\{3g(R^2-L^2)^{1/2}\}$]

Péndulos

6. ¿Qué longitud tiene un péndulo simple que bate segundos en un lugar de la Tierra en el que otro péndulo de 53 cm da 684 oscilaciones en 1000 s?. [*Solución*: 99.2 cm].

7. Se tiene una regla uniforme de longitud L y se coloca en un plano vertical de modo que pueda girar alrededor de un eje horizontal, perpendicular a la regla, y a distancia d del centro de masa. Suponiendo oscilaciones pequeñas, calcular el valor de d para que el periodo sea mínimo [*Solución*: $L/\sqrt{12}$]

Oscilaciones amortiguadas y forzadas

8. Se tiene una masa m unida a un resorte de constante k. Hay amortiguamiento debido a una fuerza proporcional a la velocidad de la partícula, siendo la constante de proporcionalidad igual a $k/2$. a) Si la amplitud inicial es A, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que la amplitud vale $A/2$?; b) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se ha disipado la mitad de la energía total? [*Solución*: a) $(4m/k)\ln 2$, b) $4m/k)\ln\sqrt{2}$]

9. Se tiene una masa m unida a un resorte de constante k (sin masa). El amortiguamiento se supone despreciable (b=0); a) ¿Cuál será la frecuencia de la fuerza armónica externa aplicada a m para que el movimiento resultante tenga una amplitud máxima?, b) Si la frecuencia se duplica, ¿qué le pasa a la amplitud? [*Solución*: $\omega=(k/m)^{1/2}$; $A=F_0/(3m\omega^2)$]