Universidad de Chile
Departamento de Física
FI1002 - Sistemas Newtonianos

Auxiliar ∞ - Preparando el Control 1

Auxiliares: José M. González C.
Lucciano Letelier C.
Edgardo Rosas C.

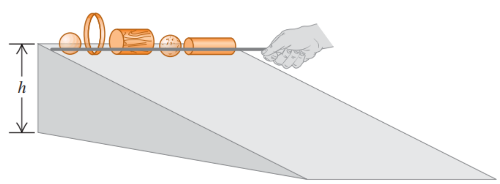
07-11-2018

P1. Un péndulo con roce se describe por la ecuación de movimiento:

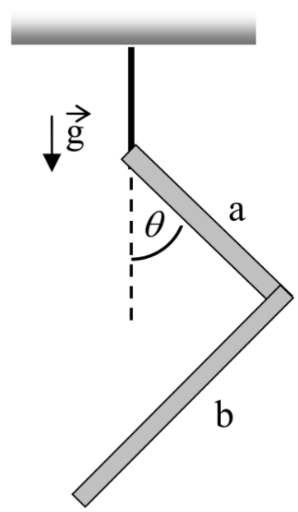
$$\ddot{\phi} = \frac{g}{L} sin(\phi) - \gamma \dot{\phi}$$

donde L es el largo del péndulo y el coeficiente de roce. A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una desratización temporal dada.

P2. En una demostración física, un profesor "pone a competir" diversos cuerpos rígidos redondos. Esto lo hace soltándoles del reposo al mismo tiempo desde la parte superior de un plano inclinado. Suponiendo que los cuerpos ruedan sin resbalar y una ausencia de roce viscoso asociado al aire. ¿Cuál cuerpo llega a la base primero y "gana la carrera"?

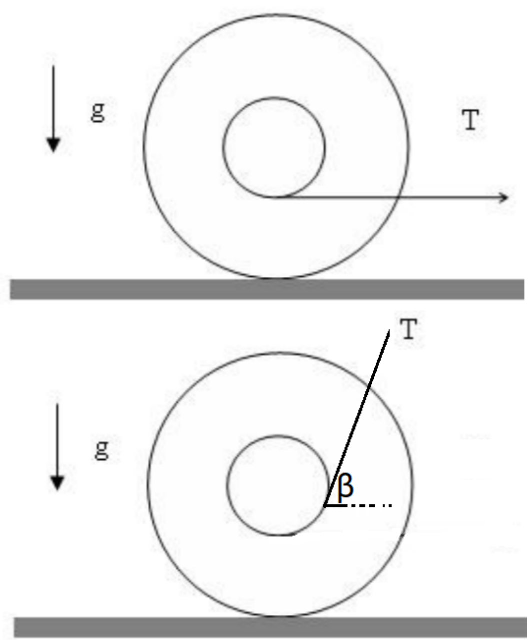


P3. [**propuesto**]Considere una escuadra formada por dos barras uniformes de igual densidad de masa ρ y de largos a y b, respectivamente, unidas de modo que forman un ángulo recto entre sí y que cuelgan con un hilo desde el cielo, como se indica en la figura. Las longitudes de la escuadra satisfacen la relación $b^2 = a^2 + 2ab$



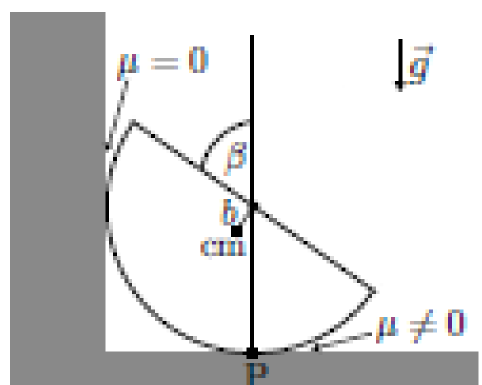
- Calcule el ángulo θ cuando el sistema está en equilibrio.
- Determine la posición horizontal del centro de masa con respecto a la cuerda.
- Calcule y haga un gráfico de la energía potencial ¿Qué valor toma la energía potencial cuando está en equilibrio?

P4. **[propuesto]** Un carrete consiste en 2 discos de radio R unidos por un cilindro de radio r que enrolla una cuerda ideal de largo ∞ y $R > r$. Suponga que un carrete de masa M tiene un momento de inercia I_{CM} con respecto a su centro de masa. La idea del problema es predecir, mediante el uso de las herramientas del curso, el movimiento intuitivo que tendrá el carrete tras aplicarle una tensión T horizontal. Para ello se le recomienda trabajar la configuración mas general, en dónde la tensión T se ha inclinado en un ángulo β como se indica en la figura.



- Calcule la condición para que el carrete deslice sin resbalar
- Calcule la aceleración angular
- Establezca el valor apropiado de β que le permite recuperar la configuración inicial y concluya.

P5. **[propuesto]** Considere una semi-esfera de radio R, hecha de un material de densidad p_0, que se encuentra sobre una superficie horizontal y apoyada contra una pared tal como se muestra en la figura adjunta. El centro de masas de una semi-esfera homogénea queda sobre el eje de simetría y a una distancia $b = 3R/8$ de la base. Suponga que entre la semi-esfera y el suelo el coeficiente de roce estático es $\mu = 3/16$, mientras que entre la pared y la semi-esfera el roce es nulo.



(a) Haga un diagrama de cuerpo libre para la semi-esfera .

(b) Encuentra la magnitud y dirección del torque, respecto al punto de apoyo P, ejercido por la fuerza de gravedad cuando la semi-esfera está ladeada en un ángulo.

(c) Encuentre la fuerza de roce entre la semi-esfera y el suelo .

1 Pauta

P1. En esta pregunta nos piden la ecuación de movimiento para ϕ, es decir que dejemos ϕ_{i+1} en función a ϕ_i y ϕ_{i-1}, por lo cual debemos aplicar Verlet en ambos lados de la igualdad. Primero comenzamos encontrando $\ddot{\phi i}$ lo cual nos entrega una expresión dependiente solo de los ángulos:

$$\ddot{\phi_i} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta t^2} \tag{1}$$

Luego como queremos despejar ϕ_{i+1}, lo ideal es que del lado derecho no existan términos de este tipo, por lo cual en el $\dot{\phi_i}$, hacemos Verlet Atrasado, quedando:

$$\dot{\phi_i} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta t} \tag{2}$$

al reemplazar (1) y (2) en la ecuación inicial y el $sin(\phi)$ como $sin(\phi_i)$, queda:

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta t^2} = \frac{g}{L} sin(\phi_i) - \gamma \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta t}$$

al despejar ϕ_{i+1} obtenemos la ecuación de movimiento pedida.

$$\phi_{i+1} = \frac{g}{L} \Delta t^2 sin(\phi_i) - \gamma \Delta [\phi_i - \phi_{i-1}] + 2\phi_i - \phi_{i-1}$$

P2. Antes de comenzar, se debe aclarar que este ejercicio puede ser resulto por muchos métodos, pero a modo de comprender en detalle el concepto de Momento de Inercia, se optará por resolverlo con Energía.

Utilizando la Conservación de Energía se decide comparar el instante inicial de la carrera (cuando parten del reposo) con el fin de la misma. Ya que se pide ver cuál cuerpo es el que llega primero, es conveniente evaluar la velocidad de los cuerpos.

$$E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 + \cancel{W}$$

Si bien por formalidad de este curso se incluye el Trabajo en la ecuación de Energía, bajo los supuestos dados se puede despreciar W a razón que la fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar.

$$0 + mgh = (\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2) + 0$$

Para esto se toma por dado que en el reposo $v_{cm} = 0$ y $U_2 = 0$ debido a que se toma como altura referencial la meta de la carrera.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$2mgh = mv_{cm}^2 + I\omega^2$$

Ahora dado que tenemos un numero no especificado de figuras a analizar (nunca llevarse por lo que aparece explícitamente en los dibujos) es conveniente analizar la velocidad final de cada cuerpo, categorizando el momento de inercia para cualquier tipo de figura.

$$I = \gamma m R^2$$

Dónde $\gamma \in [0, 1]$ representa un valor adimensional que depende de la forma del cuerpo.

$$2mgh = mv_{cm}^2 + (\gamma m R^2)\omega^2$$

$$2mgh = mv_{cm}^2 + (\gamma m R^2)(\frac{v_{cm}}{R})^2$$

$$2mgh = mv_{cm}^2 + \gamma m v_{cm}^2$$

$$2gh = v_{cm}^2 + \gamma v_{cm}^2$$

$$2gh = v_{cm}^2(1+\gamma)$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}}$$

Viendo la expresión de la rapidez de un cuerpo se puede ver que esta no depende de la masa ni del radio, sino que sólo del factor γ propio de cada figura geometrica.

Teniendo claro esto, queda evidenciado que el cuerpo ganador de la carrera es aquel con el menor γ asociado, siendo (en caso de las figuras conocidas) la esfera.

1.0.1 Concluisones adicionales

- Con este resultado queda evidenciado que el Momento de Inercia representa la "oposición del cuerpo al movimiento rotacional".
- Los cuerpos con γ pequeña siempre vencen a aquellos con γ grande, porque menos de su energía cinética se dedica a rotación y más a traslación.
- Ya que la rapidez no depende de la masa o el radio, todo cilindro sólido uniforme pose la misma rapidez en el cuerpo de la base (y en cualquier punto de la bajada) debido a tener igual γ. Lo mismo es cierto entre esferas, anillos, etcétera.

P3. Para calcular el ángulo θ donde se encuentra en equilibrio lo primero que hay que hacer es encontrar el Centro de masa del sistema el cual será:

$$\vec{R_{cm}} = \frac{M_a\vec{R_a} + M_b\vec{R_b}}{M_a + M_b}$$

donde $M_a = a\rho$ y $M_b = b\rho$, ya que tienen densidad uniforme.
Ahora debemos encontrar $\vec{R_a}$ y $\vec{R_b}$:
$\vec{R_a}$: Sabemos que $|\vec{R_a}| = \frac{a}{2}$, entonces:

$$\vec{R_a} = (\frac{a}{2}sin(\theta), \frac{a}{2}cos(\theta))$$

$\vec{R_b}$: Sabemos que $\vec{R_b} = \vec{r_1} + \vec{r_2}$, $|\vec{r_1}| = a$ y $|\vec{r_2}| = \frac{b}{2}$, entonces:

$$\vec{r_1} = (a * sin(\theta), a * cos(\theta))$$

$$\vec{r_2} = (-\frac{b}{2}cos(\theta), \frac{b}{2}sin(\theta))$$

$$\vec{R_b} = (a * sin(\theta) - \frac{b}{2}cos(\theta), a * cos(\theta) + \frac{b}{2}sin(\theta))$$

por lo que $\vec{R_{CM}}$ es:

$$\vec{R_{CM}} = \frac{(\frac{a^2}{2}sin(\theta) + ab * sin(\theta) - \frac{b^2}{2}cos(\theta), \frac{a^2}{2}cos(\theta) + ab * cos(\theta) + \frac{b^2}{2}sin(\theta))}{a+b}$$

ya conociendo el centro de masas, pasamos a calcular la condición de equilibrio: $\sum \vec{\tau} = 0$
lo cual implica en este caso $\vec{R_{CM}}$ x $\rho(a+b)g\ \hat{j} = 0$, con lo cual nos damos cuenta que el producto cruz solo multiplica las componentes perpendiculares, por lo que queda finalmente:

$$R_x * \rho(a+b)g = 0$$

con lo cual empezamos a despejar el ángulo en el que esta en equilibrio.

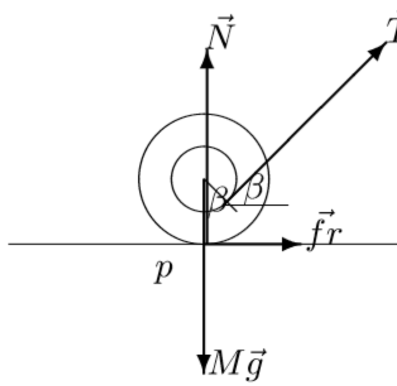
$$\frac{\frac{a^2}{2}sin(\theta) + ab * sin(\theta) - \frac{b^2}{2}cos(\theta)}{a+b}\rho(a+b)g = 0$$

si seguimos quitando terminos de la ecuación llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{(a^2 + 2ab)sin(\theta) - b^2cos(\theta)}{a+b} = 0$$

pero sabemos que $b^2 = a^2 + 2ab$ por lo que queda la igualdad $sin(\theta) = cos(\theta)$
donde la solución es $\theta = \frac{\pi}{4}$

P4. DCL



Ecuaciones

$$\underbrace{\sum \vec{F}_x = T\cos\beta\hat{\mathbf{i}} + \vec{fr} = M\vec{a}}_{\text{Ec. de Newton para el eje x}} \tag{3}$$

$$\underbrace{\sum \vec{F}_y = N\hat{\mathbf{j}} + T\sin\beta\hat{\mathbf{j}} - Mg\hat{\mathbf{j}} = 0}_{\text{Ec. de Newton para el eje y}} \tag{4}$$

$$\underbrace{\sum \vec{\tau}_p = ((R - r\cos\beta)\hat{\mathbf{j}} + r\sin\beta\hat{\mathbf{i}}) \times (T(\cos\beta\hat{\mathbf{i}} + \sin\beta\hat{\mathbf{j}})) = I_p\vec{\alpha}}_{\text{Ec. de torque para el punto p}} \tag{5}$$

$$\underbrace{I_p = I_{CM} + MR^2}_{\text{Teorema de Steiner para el punto p}} \tag{6}$$

Ideas y condición de rodadura

La idea es ver hacia dónde se desplaza este sistema, para ello existen muchas formas. Una es calcular cuanto vale la aceleración del centro de masa, otra un poco mas complicada es ver hacia dónde apunta la fuerza de roce con el piso. En este caso calcularemos el vector aceleración angular. Para que el carrete ruede sin resbalar se necesita una fuerza de roce que convierta el movimiento rotacional en movimiento lineal, y que además esta fuerza no produzca trabajo sobre el carrete, es decir $\vec{fr} > 0$. Dicho de otra forma, $N > 0$, condición que juntada con la ec (2) no da como resultado.

$$\frac{Mg}{T} > sen(\beta)$$

El giro

juntando (3) y (4):

$$T(R - r\cos\beta)\cos\beta(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) + Tr\sin^2\beta(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) = I_p\vec{\alpha}$$

$$-T(R - r\cos\beta)\cos\beta\hat{\mathbf{k}} + Tr\sin^2\beta\hat{\mathbf{k}} = I_p\vec{\alpha}$$

$$T(-R\cos\beta + r\cos^2\beta + r\sin^2\beta)\hat{\mathbf{k}} = I_p\vec{\alpha}$$

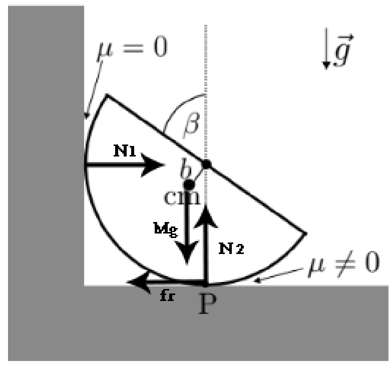
$$T(r - R\cos\beta)\hat{\mathbf{k}} = I_p\vec{\alpha}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{-T(R\cos\beta - r)}{I_{CM} + MR^2}\hat{\mathbf{k}}}$$

Resultados

De aquí se deduce que $\vec{\alpha}$ producirá un giro horario si $R\cos\beta > r$, es decir, la rueda se trasladará hacia la derecha.
Si $R\cos\beta < r$ entonces la rueda se trasladará hacia la izquierda.
Si $R\cos\beta = r$ ¿No se moverá?
En el caso particular en que $\beta = 0$ se moverá hacia la derecha.

P5. (a) En este punto es importante fijarse en que existen 2 fuerzas normales, con el suelo y la pared.

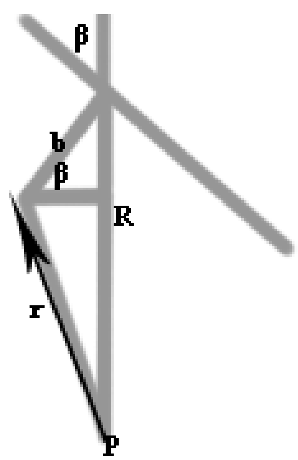


(b) Ya llegado este punto queremos saber el torque para eso debemos saber el $\vec{r_{cm}}$ desde P y luego hacer el producto cruz con la fuerza peso (aquí es muy importante considerar que son vectores), si vemos el ángulo que nos sirve (β), se repite donde muestra la figura es decir podemos determinar en coordenadas cartesianas, el $\vec{r_{cm}}$, quedando:

$$r_y = R + b * sin(\beta), r_x = b * cos(\beta)$$

sabemos que $\vec{r_{cm}} = r_x\hat{x} + r_y\hat{y}$ quedando:

$$\vec{r_{cm}} = b * cos(\beta)\hat{x} + (R - b * sin(\beta))\hat{y}$$



sigue que $\vec{Peso} = Mg\hat{y}$, entonces al hacer el producto cruz entre $\vec{r_{cm}}$ y $\vec{Peso}$ la componente en $\hat{y}$ se anula con el peso, y solo queda $\tau_p = r_x|\vec{Peso}|$ es decir:

$$\tau_p = bMg * cos(\beta)$$

(c) para esta parte necesitamos primero encontrar una relación que nos permita encontrar el roce, para esto aplicamos $\sum F_x = 0$, lo que nos entrega que $N_1 = fr$, por lo que basta encontrar N_1, para encontrar fr, como ya sabemos el torque del peso respecto a p, entonces buscamos el torque de N_1 respecto a p.

$$r_x = -R, r_y = R$$

$$N_1 = N_1 \hat{x}$$

entonces la condicion de $\tau = 0$ es solamente la multiplicación de r_y y N_1 pero con signo opuesto al otro torque más el otro torque:

$$N_1 = \frac{Mgb * cos(\beta)}{R}$$

que es el mismo valor de fr pero con signo opuesto.