



Pauta Auxiliar 9

Oscilaciones y ondas.

Prof: Claudio Falcon

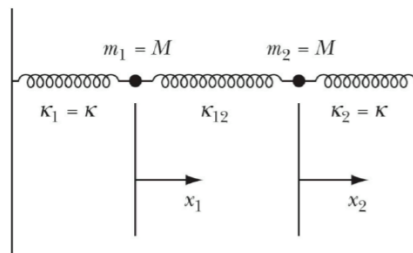
Auxiliares: Felipe Cubillos, Francisco Silva, Manuel Torres

Dudas: manuel.torres@ug.uchile.cl

Fecha: 23 de Noviembre, 2018.

Problema 1.- Movimiento oscilatorio longitudinal:

Considere un sistema de dos cuerpos de masa M , los cuales están conectados a la pared por medio de resortes, los cuales son idénticos y de constante elástica k , y entre ellos se encuentran conectados por un tercer resorte de constante elástica k_{12} , como se ve en la figura. Suponga que la posición de equilibrio de las masas es la misma que la de los resortes. Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas.



Desarrollo problema 1:-

Para calcular las ecuaciones de movimiento de ambas masas se debe considerar que el largo total el espacio horizontal es L , y como la posición de equilibrio de las masas es igual a la de los resortes:

$$L = l_{o1} + l_{o2} + l_{o3} \quad (1)$$

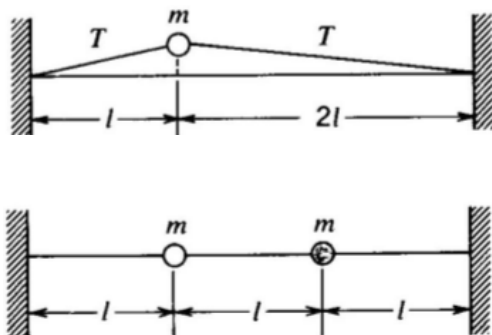
Luego, colocando el origen en la pared del lado izquierdo, es posible decir que la posición de la masa m_1 es x_1 y la posición de la masa m_2 es x_2 , luego para calcular los Δx de los resortes, se utilizan las posiciones de las masas con respecto a la pared. Entonces:

$$m_1 \ddot{x}_1 = kx_1 + k_c(x_2 - x_1) \quad (2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_c(x_2 - x_1) + k(L - x_2) \quad (3)$$

Problema 2.- Movimiento oscilatorio transversal:

Una cuerda de longitud $3l$ y masa despreciable se sujeta por sus extremos a dos soportes fijos. La tensión de la cuerda es T .



- Se sujeta una partícula de masa m a una distancia l de un extremo de la cuerda, según está indicado en la figura. Escriba la ecuación de movimiento para la partícula, y encuentre su periodo de pequeñas oscilaciones (transversales).
- Luego se une una partícula adicional de masa m según se muestra en la figura, dividiendo la cuerda en tres segmentos iguales entre sí, con tensión T cada uno. Dibuje el aspecto de la cuerda y la posición de las masas en los dos modos normales separados de las oscilaciones transversales.
- Que ocurriría si se siguen añadiendo partículas de masa m equiespaciadas entre sí, desarrolle una expresión para la ecuación de ondas y concluya.

Desarrollo Problema 2.-

Según lo discutido en clases, la sumatoria de fuerzas para m , en el eje y :

$$m\ddot{y} = T_1 \sin(\theta_1) + T_2 \sin(\theta_2) \quad (4)$$

Luego como la tensión es igual por ambos lados se tiene que:

$$m\ddot{y} = T(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) \quad (5)$$

$$m\ddot{y} = T(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) \quad (6)$$

Luego, por teorema del coseno es posible superponer ambas funciones trigonométricas con un ángulo que es una ponderación de los dos anteriores (para nosotros nos basta con la existencia, si puede intente despejarlo ya que el desarrollo es interesante).

$$m\ddot{y} = T \sin(\theta_{ponderado}) \quad (7)$$

Posteriormente para un régimen de pequeñas oscilaciones se tiene que:

$$m\ddot{y} = T \tan(\theta_{ponderado}) \quad (8)$$

$$m\ddot{y} = T \tan(\theta_{ponderado}) = T \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (9)$$

Como $\Delta x \rightarrow \cos(\theta) \rightarrow 1$, luego $w_o^2 = \frac{T}{m\Delta x} = \frac{T}{m}$. Por lo tanto es directo despejar el periodo, ya que $w_o = \frac{2\pi}{T}$.

Por otro lado, regresando a la ecuación 8, en caso que la cuerda tenga una mayor cantidad de masas (infinitas masas), se pasa a una cuerda continua con una densidad, entonces los $\Delta x \rightarrow 0$, lo que hace definir una derivada, luego:

$$m\ddot{y} = T \frac{\partial y}{\partial x} \quad (10)$$

Y derivando respecto a la posición se tiene:

$$\frac{\partial m}{\partial x} \ddot{y} = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} \ddot{y} = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (12)$$

Como la derivada de la masa respecto al espacio es la densidad, y reordenando se tiene:

$$\lambda \ddot{y} = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (13)$$

$$\ddot{y} = \frac{T}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (14)$$

$$\ddot{y} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (15)$$

Obteniendo así la ecuación de ondas.