Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar extra #2- Sólido rígido

Sistemas Newtonianos FI1002-6 - Primavera 2018

Profesor: Claudio Falcon - Auxiliares: Felipe Cubillos, Francisco Silva y Manuel Torres[1]

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

Problemas:

P1. Una masa m cualga de dos poleas, de masas M_1 y M_2 y radios R_1 y R_2 respectivamente, también cuelga de un resorte de constante elástica k y largo natural l_o, tal como se muestra en la figura. En $t = 0$ el sistema se suelta desde el reposo con el resorte en su largo natural. Al respecto:

- (a) Determine la distancia máxima que puede caer la masa m.
- (b) Demuestre que la velocidad máxima que la masa adquiere durante su descenso, depende de la presencia de poleas, pero que contrariamente, la posición en la que ésta se alcanza no.

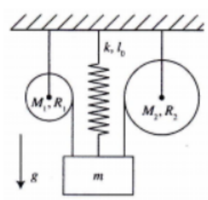

Figura 1

P2. Un semicilindro de radio R y peso W se encuentra en equilibrio estático sobre un plano horizontal, con un pequeño bloque de peso Q sobre ´el. El bloque está ligado mediante un resorte ideal de largo natural ‘$l_o = 0$ y constante elástica k a un punto A en el borde (ver figura). Suponga que no hay roce entre la superficie del cilindro y la masa de peso Q. Determine el ángulo de equilibrio. Considere conocida la distancia D a la que se encuentra el centro de masas del punto O. Analice con cuidado que pasa cuando Q es pequeño.

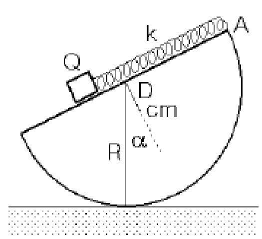

Figura 2

P3. Considere una varilla homogénea y delgada de largo L y de masa M ubicada dentro de un agujero semi esférico en la superficie. Considere que el agujero semi esférico tiene un radio R sujeto a que $L > 2R$. Asuma que entre la varilla y la superficie del agujero no hay roce. Encuentre la posición de equilibrio de la varilla.

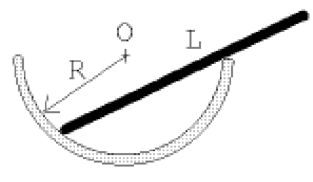

Figura 3

P4. La figura muestra una barra de masa M y largo L que puede rotar sin roce con respecto a su extremo O. Del otro extremo se sujeta un disco de radio R al que le falta un agujero de radio $R/2$. La densidad del disco uniforme es ρ. El sistema se suelta desde el reposo con la barra formando un ángulo $_o$ con respecto al eje vertical, luego cae por efecto de la gravedad.

- (a) Determine el momento de inercia del sistema con respecto al punto de rotación.
- (b) Determine la velocidad con la que pasa el centro del disco por la vertical.

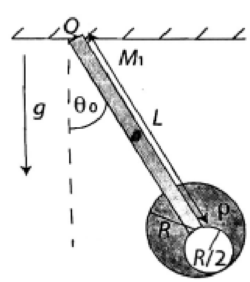

Figura 4

[1]Dudas y sugerencias al correo: manuel.torres@ug.uchile.cl

Desarrollo:

Problema 1:

Parte a :

Para determinar la distancia máxima, utilizaremos la conservación de la energía mecánica, ya que en $t = 0$ se tiene que el sistema está en reposo y el resorte está en su largo natural, por lo que solo habría energía potencial, pero ésta al ser relativa, diremos que en el origen es nulo, entonces la energía mecánica inicial es nula:

$$E_0 = 0 \tag{1}$$

Por otro lado, la energía mecánica en el instante final está compuesta por la energía potencial elástica del resorte extendido (hasta su amplitud máxima), la variación de energía potencial (como desciende, debe ser negativa) y la energía cinética que es nula, ya que al alcanzar el máximo el sistema se detiene instantáneamente en dicho instante, luego:

$$E_f = \frac{kx_{max}^2}{2} - mgx_{max} \tag{2}$$

luego, igualando por conservación de la energía se tiene:

$$0 = \frac{kx_{max}^2}{2} - mgx_{max} \tag{3}$$

De donde es posible despejar 2 valores para x_{max}, uno es cero y el otro es es $x_{max} = \frac{2mg}{k}$, el segundo es el que tiene sentido físico.

Parte b :

Para probar lo solicitado en la parte (b), seguiremos utilizando conservación de la energía, teniendo que en un punto arbitrario de la trayectoria, considerando todo el sistema la energía mecánica es:

$$E = \frac{kx^2}{2} - mgx + \frac{I_1w_1^2}{2} + \frac{I_2w_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{4}$$

Donde es importante notar que las poleas solo giran y la masa m solo se traslada, por lo que poseen las respectivas expresiones para la energía cinética.

Por otro lado, por movimiento circular uniforme y considerando que la masa m desciende sin oscilar (que un lado baje mas rápido que el otro), se tiene que:

$$w_1R_1 = w_2R_2 = \dot{x} \tag{5}$$

Luego basta con reemplazar las expresiones de la inercia de los discos (poleas) respecto a sus respectivos centros de masa, y luego los elementos de la ecuación 5 en la ecuación 4 se tiene:

$$E = \frac{kx^2}{2} - mgx + \frac{\frac{M_1R_1^2}{2}w_1^2}{2} + \frac{\frac{M_2R_2^2}{2}w_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{6}$$

$$E = \frac{kx^2}{2} - mgx + \frac{M_1R_1^2w_1^2}{4} + \frac{M_2R_2^2w_2}{4} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{7}$$

$$E = \frac{kx^2}{2} - mgx + \frac{M_1\dot{x}^2}{4} + \frac{M_2\dot{x}^2}{4} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{8}$$

Y ahora, conservando la energía con el instante inicial:

$$0 = \frac{kx^2}{2} - mgx + \frac{M_1\dot{x}^2}{4} + \frac{M_2\dot{x}^2}{4} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{9}$$

Ahora, para realizar el análisis, se debe derivar (cuidado con la regla de la cadena) la igualdad de la ecuación 9 con respecto al tiempo, quedando:

$$0 = 2\frac{kx}{2}\dot{x} - mg\dot{x} + 2\frac{M_1\dot{x}}{4}\ddot{x} + 2\frac{M_2\dot{x}}{4}\ddot{x} + 2\frac{m\dot{x}}{2}\ddot{x} \tag{10}$$

Luego realice el siguiente análisis: Si se alcanza un máximo para la velocidad, la aceleración debe ser nula, por lo que $\ddot{x} = 0$

$$0 = 2\frac{kx}{2}\dot{x}_{max} - mg\dot{x}_{max} \tag{11}$$

Por lo que la velocidad máxima sólo depende de la energía potencial y los discos de las poleas no influyen, pero gracias al término de la energía de las poleas se puede afirmar que la aceleración es acotada (ya que aparece explícitamente la aceleración) y por lo tanto existe el máximo.

Problema 3:

Desarrollo parcial :

Para comenzar, debemos identificar los ángulos, digamos que α es el ángulo de la varilla con respecto a la horizontal, luego lo propagamos en los puntos de contacto de la varilla con la superficie para poder modelar las ecuaciones de modelamiento (realícelo y si tiene dudas comente el foro).

Si ubicamos un sistema de referencias en el punto de contacto inferior, con el eje X paralelo a la varilla, y realizando un poco de trigonometría se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\sum F_x = N_1 cos(\alpha) - Mgsen(\alpha) = 0 \tag{12}$$

$$\sum F_y = N_2 + N_1 sen(\alpha) - Mgcos(\alpha) = 0 \tag{13}$$

$$\sum \tau = -\frac{Lmgcos(\alpha)}{2} + 2RN_2 cos(\alpha) = 0 \tag{14}$$

Donde la N_1 se encuentra de forma radial y la N_2 es perpendicular a la varilla en sus respectivos puntos de contacto (el punto inferior y superior respectivamente).

Luego, con dicho sistema de ecuaciones debe despejar el ángulo α, en caso de necesitar mas ecuaciones se pueden sacar relaciones geométricas dentro del problema.

Problema 4:

Desarrollo parcial parte a :

La estrategia consiste en que para calcular el momento de inercia total respecto al punto de giro, se calcula la inercia de cada uno de los elementos por separado con sus respectivos desplazamientos de Steiners y luego se suman por teorema de los ejes paralelos, considerando el disco grande como un disco macizo (sin el hueco), y el disco pequeño como un disco aparte y macizo, donde luego en la ponderación total el disco pequeño se resta (análogo a restar masa en el cálculo del centro de masas).

Ya que se conoce la densidad superficial, y son conocidos los radios de los discos, es posible calcular la masa del disco grande y la masa (fantasma) del disco chico, que serán denotadas como m_g y m_c respectivamente.

Calculando los momento de inercia para cada elemento por separado y con respecto al punto de giro se tiene:

$$I_{o,grande} = \frac{m_g R^2}{2} + m_g L^2 \tag{15}$$

$$I_{o,chico} = \frac{m_c(\frac{R}{2})^2}{2} + m_c(L + \frac{R}{2})^2 \tag{16}$$

$$I_{o,barra} = \frac{ML^2}{3} \tag{17}$$

Luego la inercia total del sistema es:

$$I_{o,t} = I_{o,barra} + I_{o,grande} - I_{o,chico} \tag{18}$$

Realizando dicho procedimiento se obtiene lo pedido en la parte (a), también es importante notar que el teorema de Steiner NO ES LINEAL, por lo que SIEMPRE se debe realizar respecto al centro de masas del cuerpo i-ésimo.

Desarrollo parcial parte b :

La parte (b) se puede realizar con conservación de la energía y ecuaciones de rodadura, o con ecuaciones de movimiento (suma de torque), además en ambos casos se debe calcular el centro de masas del sistema (para calcular el torque realizado por el peso, o para calcular la energía potencial según sea el método elegido).

Realizando la suma de torque, es posible despejar la aceleración angular en función de expresiones conocidas (dependiente de θ), luego utilizando la ecuación:

$$w_f^2 - w_o^2 = 2\Delta\theta\alpha \tag{19}$$

Donde la velocidad angular inicial es nula, la variación del ángulo desde el instante inicial hasta alcanzar la vertical es θ_o, es posible obtener la velocidad angular cuando el sistema pasa por la vertical, y con dicha velocidad angular puede obtener cualquier velocidad tangencial para cualquier punto que se solicite, en este caso como se pide la velocidad del centro del disco, dicha velocidad sería:

$$V_t = L \cdot w_f \tag{20}$$