Resumen

Ecuaciones diferenciales para estudiar oscilaciones.

Prof: Claudio Falcon
Auxiliares: Felipe Cubillos, Francisco Silva, Manuel Torres
Dudas: manuel.torres@ug.uchile.cl
Primavera 2018.

Motivación.-

Consideremos la dinámica de un cuerpo que está bajo los efectos de una fuerza elástica de la forma:

$$F_e = -k\Delta x = -k(x - l_o) \tag{1}$$

Luego la sumatoria de fuerzas en el eje donde se aplica la fuerza elástica será:

$$m\ddot{x} = -k(x - l_o) \tag{2}$$

Luego esa posible darse cuenta, que la ecuación de movimiento es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2.

$$m\ddot{x} + k(x - l_o) = 0 \tag{3}$$

Ecuaciones diferenciales.-

En un comienzo, y para los alcances del curso, es bueno entender una ecuación diferencial como una ecuación donde la incógnita es una función cualquiera $x(t)$, que depende de sus derivadas, oséa algo de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t) \frac{\partial^i x(t)}{\partial t^i} = f(t) \tag{4}$$

Observaciones:

- Notar que la Ecuación 4 es una combinación lineal de la función incógnitas y sus derivadas cuando todos los términos α_i son independientes de t.
- Se dice que Ecuación 4 es homogénea cuando $f(t) = 0$, por el contrario, se dice no homogénea cuando $f(t) = 0$.

- El orden de la ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden presente en la ecuación.

A continuación se revisará un método de resolución de ecuaciones diferenciales:

Resolución de EDOs lineales y homogéneas :

Un caso sencillo de resolver, es el caso en que la ecuación es lineal y homogénea (lado derecho nulo), para ello se aprovechará el carácter lineal de la derivada, caracterizándola como si se tratase de un polinomio con el siguiente cambio de variable:

$$\frac{\partial^i x(t)}{\partial t^i} = \lambda^i \tag{5}$$

Que luego evaluándolo en la Ecuación 4 se obtiene la caracterización buscada:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t)\lambda^i = 0 \tag{6}$$

Luego a partir de dicho polinomio característico se obtienen las raíces del mismo, las cuales conformaran la base del espacio de soluciones (funciona igual que un espacio vectorial gracias a que es lineal). Por último las bases de las soluciones de la ecuación diferencial serán de la forma:

$$B[x(t)] =< e^{(-\lambda_i t)} > \tag{7}$$

Luego la solución es una combinación lineal de las bases:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i e^{(-\lambda_i t)} \tag{8}$$

Observación:

- Notar que en ningún momento se explicó cómo obtener las constantes c_i para la Ecuación 8.

Problema de Cauchy :

Un problema de Cauchy está dado por una ecuación diferencial junto a puntos conocidos de la función y/o sus derivadas, algo de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t)\frac{\partial^i x(t)}{\partial t^i} = f(t) \tag{9}$$

$$\frac{\partial^i x(t_o)}{\partial t^i} = x_o \tag{10}$$

Lo descrito en la Ecuación 10 se conocen como valores iniciales, y al ser conocidos, con un poco de trabajo algebráico es posible obtener los valores de las constantes de la Ecuación 8.

Por ahora, no se profundizará en esto, ya que es importante verlo en clases, pero es una buena idea resolver el polinomio carácteristico para la Ecuación 3, y luego utilizar la identidad de Euler $(exp(-ix) = cos(x) + isen(x))$.

Oscilaciones:.-

Para hallar la solución de la Ecuación 3, no es necesario saber Ecuaciones diferenciales, pero lo último ayuda para entender el fenómeno que hay detrás, sobretodo cuando se estudian oscilaciones complejas (amortiguadas y forzadas).

Por el momento, se presentarán las soluciones de las ecuaciones diferenciales que son de interés estudiar (en clase auxiliar se verá en detalle cómo llegar a las soluciones).

Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden 2, sin el término de la primera derivada, lineal y homogénea:

$$m\ddot{x} + kx - kl_o = 0 \tag{11}$$

Su solución es de la forma, donde $w_o = \sqrt{k/m}$:

$$x(t) = Acos(w_o t + \phi_o) + Bsen(w_o t + \psi_o) \tag{12}$$

Pero simplificando con bastante álgebra y propiedades trigonométricas se obtiene una expresión limpia:

$$x(t) = Csen(w_o t + \gamma) \tag{13}$$

Luego calculando las derivadas de la Ecuación 13, se obtiene la velocidad en función del tiempo y la aceleración en función del tiempo.

$$\dot{x}(t) = Cw_o cos(w_o t + \gamma) \tag{14}$$

$$\ddot{x}(t) = -Cw_o^2 sen(w_o t + \gamma) \tag{15}$$

Dónde hay 2 constantes, C y γ, las cuales para obtenerlas en necesario tener 2 condiciones iniciales (de hecho, para una EDO de orden n, se requieren n condiciones iniciales).

Péndulo.-

El péndulo también tiene una ecuación diferencial asociada a su suma de torque:

$$I_o\ddot{\phi} = -mglsen(\phi) \tag{16}$$

$$I_o\ddot{\phi} + mglsen(\phi) = 0 \tag{17}$$

Luego, ésta ecuación diferencial tiene una solución sencilla y lineal en el caso en que $\phi \to 0$, ya que $sen(\phi) \to \phi$, entonces:

$$I_o\ddot{\phi} + mgl\phi = 0 \tag{18}$$

Dónde, la Ecuación 18 se puede resolver análogamente al procedimiento anteriormente descrito, y posee el mismo tipo de solución, con $w_o = mgl/I_o$.