## Pauta Auxiliar extra #1- Sólido rígido

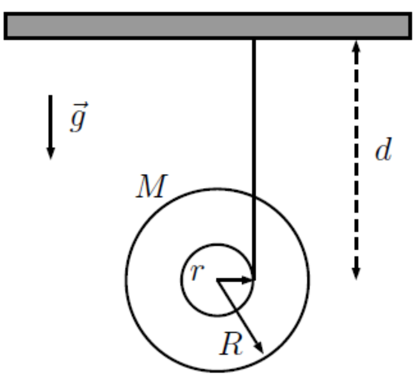
### Sistemas Newtonianos FI1002-6 - Primavera 2018

Profesor: Claudio Falcon - Auxiliares: Felipe Cubillos, Francisco Silva y Manuel Torres[1]

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile*

# Problemas:

**P1.** (**Pregunta para revisar conceptos**) Un yo-yo está formado por dos discos uniformes cada uno de masa M y radio R. Uniendo estos discos hay un eje de radio r y masa despreciable. Un hilo se enrolla en torno a este eje y su extremo se sostiene desde una cierta altura. En un instante, el yo-yo se deja caer, partiendo del reposo. Inicialmente se encuentra a una distancia D, del extremo superior del hilo. Encuentre la aceleración del centro del yo-yo. Además encuentre la energía cinética del yo-yo utilizando teorema de Steiner

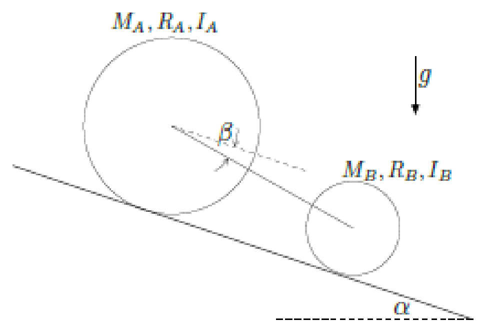



**P2.** (**Pregunta de control**) Se tienen dos cilindros de masas Ma y Mb, radios Ra y Rb y momentos de inercia respecto a sus centros Ia e Ib, tales que:

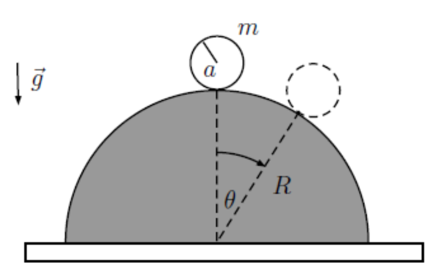
$$\frac{I_A}{M_A R_A^2} > \frac{I_B}{M_B R_B^2}.$$

Los cilindros se mueven sobre un plano inclinado en un ángulo, rodando sin resbalar, debido al roce estático con la superficie. Los cilindros están unidos por su centro mediante una cuerda ideal que forma un ángulo con respecto al plano inclinado.

a) Determine la aceleración del sistema
b) Calcule la tensión de la cuerda




**P3.** (**Pregunta de control**) Un cilindro de radio a y masa m se encuentra en el punto más alto de un semicilindro de radio R, con el cual tiene un coeficiente de roce estático $\mu$. En cierto instante, el cilindro es sacado de su punto de equilibrio y comienza a rodar sin resbalar sobre el semicilindro.
a)Plantee la ecuación de movimiento del centro de masa del cilindro mientras que éste rueda sin resbalar.
b)Encuentre la velocidad del centro del cilindro en función del ángulo theta mientras que rueda sin resbalar.




[1]Dudas y sugerencias al correo: manuel.torres@ug.uchile.cl

# Desarrollo:

El primer problema se discute en conjunto, analizando los conceptos clave y viendo las diferentes posibilidades para desarrollar el problema.

## Discusión Problema 1:

Se tiene que la suma de torque se puede realizar respecto distintos puntos:

$$\sum \tau_p = I_p \alpha \tag{1}$$

$$\sum \tau_{cm} = I_{cm} \alpha \tag{2}$$

Pero claramente el torque calculado en puntos distintos, tiene una magnitud distinta, pero además, por el teorema de Steiner se tiene que:

$$I_p = I_{cm} + md^2 \tag{3}$$

$$\Rightarrow I_p \geqslant I_{cm} \tag{4}$$

Luego, cuando se desea describir un movimiento ($\alpha$ es invariante), se debe decidir respecto a que punto calcular el torque, pero, ¿cómo se debe decidir el punto donde calcularlo?.

Se tomará como hipótesis que el torque calculado en el punto p es mayor al torque calculado en el centro de masas, ya que en términos de los módulos se tiene que:

$$\frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{\tau_p}{I_p} = \alpha \tag{5}$$

**Propuesto:** Comprobar la ecuación 5 calculando torque e inercia.

**Conclusión:** No importa en que punto es calculado el torque, pero hay casos en los cuales elegir un buen punto, facilita mucho el desarrollo de las ecuaciones.

Luego calculando el torque en ambos puntos (para comparar), ya que hay dos fuerzas (peso y tensión) perpendiculares al brazo del torque, se tiene que:

$$\sum \tau_{cm} = Tr = I_{cm} \alpha \tag{6}$$

$$\sum \tau_p = (M+m)gr = I_p \alpha \tag{7}$$

Luego, calculando la inercia, y aplicando teorema de Steiner en el caso del punto P, se tiene que:

$$I_{cm} = \frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} \tag{8}$$

$$I_p = \frac{mr^2}{2} + mr^2 + \frac{MR^2}{2} + Mr^2 \tag{9}$$

Luego reemplazando las inercias en las ecuaciones del torque se tiene:

$$\sum \tau_{cm} = Tr = (\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2})\alpha \tag{10}$$

$$\sum \tau_p = (M+m)gr = (\frac{mr^2}{2} + mr^2 + \frac{MR^2}{2} + Mr^2)\alpha \tag{11}$$

Ahora se desea despejar la aceleración angular, pero es posible notar que en la ecuación 10, $T$ es una incógnita, la cual se puede despejar realizando sumatoria de fuerza en el eje Y.

$$\sum F_y = T - (M+m)g = (M+m)a_{cm} \tag{12}$$

$$\Rightarrow T = (M+m)a_{cm} + (M+m)g = (M+m)(g + a_{cm}) \tag{13}$$

Luego evaluando en la ecuación de torque:

$$(M+m)(g + a_{cm})r = (\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2})\alpha \tag{14}$$

Pero, ahora no es posible despejar $\alpha$, ya que se encuentra en función de $a_{cm}$.

**Indicación:** Recuerde las ecuaciones de movimiento circular uniforme, en particular la ecuación de la aceleración. Donde, $r_o$ es la posición del punto donde se desea calcular la aceleración $a_o$ respecto al eje de giro.

$$a_o = r_o \alpha \tag{15}$$

Como en el problema se busca la aceleración del centro de masas, basta con reemplazar $\alpha$ en la ecuación 14 y despejarla.

$$(M+m)(g+a_{cm})r = (\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2})\frac{a_{cm}}{r} \tag{16}$$

También es bueno notar que si se despeja $\alpha$, es posible calcular la aceleración lineal en cualquier punto del yo-yo.

**Calculando la energía cinética:** La energía cinética total se puede descomponer en la energía cinética de distintas contribuciones de velocidades (traslacionales y rotacionales).

$$K_t = K_{rot} + K_{tras} \tag{17}$$

Calculando la energía cinética respecto al centro de masas:

$$K_{rot} = \frac{I_{cm} w^2}{2} \tag{18}$$

$$K_{tras} = \frac{(m+M)v_{cm}^2}{2} \tag{19}$$

En cambio, calculando la energía cinética, respecto al punto del giro se tiene que:

$$K_{rot} = \frac{I_p w^2}{2} \tag{20}$$

$$K_{tras} = \frac{(m+M)v_p^2}{2} \tag{21}$$

Pero en el punto de giro, por rodadura, se tiene que la velocidad traslacional es nula, entonces:

$$K_{tras} = \frac{(m+M)v_p^2}{2} = 0 \tag{22}$$

Luego la energía cinética total es independiente del punto donde sea calculada, entonces:

$$K_{t.p} = K_{t.cm} \tag{23}$$

$$\frac{I_p w^2}{2} = \frac{I_{cm} w^2}{2} + \frac{(m+M)v_{cm}^2}{2} \tag{24}$$

Por movimiento circular uniforme se tiene que $wr_{cm} = v_{cm}$

$$\frac{I_p w^2}{2} = \frac{I_{cm} w^2}{2} + \frac{(m+M)(wr_{cm})^2}{2} \tag{25}$$

$$\frac{I_p}{2} = \frac{I_{cm}}{2} + \frac{(m+M)r_{cm}^2}{2} \tag{26}$$

$$I_p = I_{cm} + (m+M)r_{cm}^2 \tag{27}$$

**Conclusión:** El desplazamiento del teorema de Steiner se desprende de la ecuación de energía.

## Problema 2:

**Parte a** :

Se calcula el torque respecto a los puntos de rotación de ambos cilindros (donde tocan el suelo):

$$\tau_{pa} = R_a M_a g sen(\alpha) + R_a T cos(\beta) = I_{pa}\alpha_a \tag{28}$$

$$\tau_{pb} = R_b M_b g sen(\alpha) - R_b T cos(\beta) = I_{pb}\alpha_b \tag{29}$$

También es posible calcular el torque respecto a los centros de masa de ambos cilindros:

$$\tau_{oa} = -R_a F_{ra} = I_a \alpha_a \tag{30}$$

$$\tau_{ob} = -R_b F_{rb} = I_b \alpha_b \tag{31}$$

Como la cuerda está tensa en cualquier instante de tiempo, ambos cuerpos se mueven con igual aceleración del centro de masas (paralela al plano inclinado). Además, por rodadura se tiene lo siguiente:

$$a_{cm} = R_a \alpha_a \tag{32}$$

$$a_{cm} = R_b \alpha_b \tag{33}$$

Por comodidad, es conveniente utilizar las ecuaciones de torque descritas en 30 y 31, de las cuales se despejan las fuerzas de roce y se evalúan las condiciones de rodadura:

$$F_{ra} = \frac{-I_a a_{cm}}{R_a^2} \tag{34}$$

$$F_{rb} = \frac{-I_b a_{cm}}{R_b^2} \tag{35}$$

Por otro lado, se debe complementar el uso de las ecuaciones de torque con el uso de las ecuaciones de fuerza, en este caso, se recomienda calcular la ecuación de fuerza para el sistema completo (es equivalente a calcular las ecuaciones de fuerza de cada componente del sistema), la cual queda:

$$(M_a + M_b)a_s = (M_a + M_b) g sen(\alpha) - F_{ra} - F_{rb} \tag{36}$$

Despejando la aceleración del sistema y reemplazando las ecuaciones 34 y 35 se tiene:

$$a_s = (\frac{I_b}{R_b^2} + \frac{I_a}{R_a^2})\frac{a_{cm}}{M_a + M_b} + g sen(\alpha) \tag{37}$$

Luego, como la aceleración del sistema corresponde a las aceleraciones de ambos centros de masas, que por lo demás son iguales, entonces se tiene:

$$a = g sen(\alpha)[1 - (\frac{(\frac{I_b}{R_b^2} + \frac{I_a}{R_a^2})}{M_a + M_b})]^{-1} \tag{38}$$

**Parte b** :

Basta con realizar la suma de fuerzas para alguno de los dos cuerpos aislados, en este caso, para el cuerpo A se tiene:

$$\sum F_a = M_a a_{cm} = M_a g sen(\alpha) + T cos(\beta) - F_{ra} \tag{39}$$

Luego despejando la tensión, y evaluando 34 y 38 se obtiene la tensión de la cuerda. También es posible realizar un procedimiento análogo calculando la suma de fuerza para el cuerpo B, y evaluando las ecuaciones 35 y 38 (se recomienda realizarlo y corroborar).

**Observación:** Al realizar la suma de fuerzas de ambos cilindros por separado, se obtiene una ecuación equivalente a la que se obtiene realizando suma de fuerzas al sistema completo, discuta, averigue o consulte ¿por qué ocurre?

## Problema 3:

**Parte a** : Ya que se pide la ecuación de movimiento del cilindro en su centro de masa, se debe realizar el torque respecto al centro de masa, mientras que las ecuaciones de fuerza se calculan igual que siempre.

**Parte b** : Para hallar la velocidad del centro del cilindro, se recomienda utilizar energía (es mas sencillo que utilizando las ecuaciones de movimientos), en particular se recomienda utilizar Bernoulli bajo las condiciones de rodadura.