Pauta Auxiliar 4

Sólido rígido - Estática

Prof: Claudio Falcon
Auxiliares: Felipe Cubillos, Francisco Silva, Manuel Torres
Dudas: manuel.torres@ug.uchile.cl
Fecha: 12 de Noviembre, 2018.

Problema 1.-

- Encuentre la posición del centro de masas de una lámina de densidad (de masa) uniforme σ y que tiene la forma indicada en la figura adjunta:
- Encuentre la posición del centro de masas de un disco de densidad uniforme σ y espesor despreciable, que además presenta un agujero circular como indica la figura:

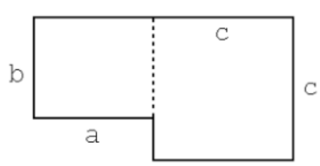

Figura 1: Lámina de densidad uniforme

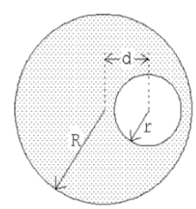

Figura 2: Disco de densidad uniforme

- En cinco de los seis vértices de un hexágono hay una masa m_0, encuentre la posición del centro de masas.

Desarrollo problema 1.-

Como la densidad es uniforme, se cummple que la densidad está dada por:

$$\sigma_o = \frac{M_{total}}{A} \tag{1}$$

Luego en el caso de la figura 1, utilizando la ecuación 1 se tiene que la masa total está dada por:

$$(ab + c^2)\sigma_o = M_t \tag{2}$$

La cual se puede descomponer como la summa de los dos cuadrados de la figura, lo que se expresa como:

$$ab\sigma_o = m_1 \tag{3}$$

$$c^2\sigma_o = m_2 \tag{4}$$

Luego, se trabaja con cada cuerpo por separado, respecto al mismo origen (aumamos el origen en la parte inferior izquierda de la imagen, notar que da lo mismo donde asignar el origen), sacando sus centros de masa respectivamente:

$$\vec{r_{m1}} = (\frac{a}{2}, c - \frac{b}{2}) \tag{5}$$

$$\vec{r_{m2}} = (a + \frac{c}{2}, \frac{c}{2}) \tag{6}$$

Y reemplazando en la ecuación de ponderación de centros de masas se tiene que:

$$\vec{r_{cm}} = \frac{m_1\vec{r_{m1}} + m_2\vec{r_{m2}}}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \vec{r_{cm}} = \frac{\frac{a^2b}{2} + c^2(a + \frac{c}{2})}{ab + c^2}\hat{x} + \frac{ab(c - \frac{b}{2}) + \frac{c^3}{2}}{ab + c^2}\hat{y} \tag{8}$$

Por otro lado, para la figura 2, se tienen las áreas de ambos discos son (tanto el disco macizo sin el hueco, como el disco pequeño que representa el hueco):

$$A_g = \pi R^2 \tag{9}$$

$$A_c = \pi r^2 \tag{10}$$

Luego como la densidad es uniforme se tiene que respectivamente:

$$M = \sigma_o \pi R^2 \tag{11}$$

$$m = \sigma_o \pi r^2 \tag{12}$$

Luego, si asignamos el origen del sistema de coordenadas en el centro del disco grande, se tendrá que las posiciones de los centros de masas de ambos discos serán:

$$\vec{r_{cm.g}} = (0, 0) \tag{13}$$

$$\vec{r_{cm.c}} = (d, 0) \tag{14}$$

Y finalmente basta con reemplazar en la ecuación que pondera los centros de masas de cuerpos distintos, con el cuidado de restar el centro de masas del disco hueco, quedando:

$$\vec{r_{cm}} = \frac{M\vec{r_{cm.g}} + m\vec{r_{cm.c}}}{M - m} \tag{15}$$

$$\vec{r_{cm}} = \frac{-dr^2}{R^2 - r^2}\hat{x} \tag{16}$$

Ya obtenido el resultado, ¿Tiene sentido que sea negativo?

Problema 3.-

Se tiene una barra homogénea de masa M y largo L, que se sostiene en un pivote a una distancia L/3 de su extremo izquierdo. Su extremo izquierdo está a una altura a desde el piso, mientras que su extremo derecho está a una altura b, con a > b como se muestra en la figura. En el extremo derecho de la barra se ejerce una fuerza de magnitud F en el sentido vertical.

- Calcule la magnitud F de la fuerza para que la barra esté en equilibrio estático.
- Si se comienza a mover la barra sin variar su inclinación, ¿Cuánto debe desplazarse para que la magnitud de la fuerza ejercida sea F=Mg/2?
- Desde la configuración inicial, piense que ahora la barra no se desplaza pero varía el ángulo de inclinación, calcule el ángulo para que la fuerza sea igual que en la parte b

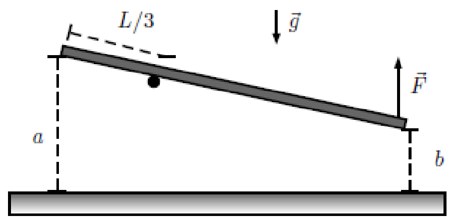

Figura 3: Barra pivoteando en un punto

Desarrollo problema 3.-

Sea α el ángulo de inclinación respecto el suelo, donde:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{a-b}{\sqrt{L^2-(a-b)^2}} \tag{17}$$

Por otro lado, realizando Newton se obtienen las ecuaciones de movimiento bajo la condición de equilibrio:

$$\sum \vec{\tau_o} = (\frac{2}{3}\vec{L}\times\vec{F}) - (\frac{1}{6}\vec{L}\times M\vec{g}) = 0 \tag{18}$$

$$\sum \vec{F_t} = M\vec{g} - \vec{F} + \vec{N} = 0 \tag{19}$$

Desarrollando la ecuación de torque se tiene:

$$\frac{2LF}{3}sen(\alpha) - \frac{LMg}{6}sen(\alpha) = 0 \tag{20}$$

$$\Rightarrow \frac{2LF}{3} - \frac{LMg}{6} = 0 \tag{21}$$

$$\Rightarrow F = \frac{3}{12}Mg \tag{22}$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{4}Mg \tag{23}$$

Pero, ¿Por qué sólo usamos la ecuación de torque?, discutamos esto por el foro. Ahora realizando un desplazamiento igual a ΔL en la barra, esto solamente altera la ecuación de torque:

$$\sum \vec{\tau_o} = ([\frac{2}{3}\vec{L} + \vec{\Delta L}] \times \vec{F}) - ([\frac{1}{6}\vec{L} + \vec{\Delta L}] \times M\vec{g}) = 0 \tag{24}$$

$$\Rightarrow (\frac{2L}{3} + \Delta L)\frac{Mg}{2}sen(\alpha) - (\frac{L}{6}\Delta L)Mgsen(\alpha) = 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{L}{3} \tag{26}$$

Ya obtenida la magnitud del desplazamiento, ¿en qué sentido debe realizarse el desplazamiento de la barra?, intente demostrarlo, o al menos discutirlo en el foro. Además intente resolver el problema cambiando el ángulo, vea si cambiando el ángulo se altera la ecuación de fuerza.

Problema 4.-

(**Pregunta 2- Control 1, primavera 2016**) Una tabla de longitud L y masa m reposa sobre un cilindro de radio R y masa M, como se muestra en la figura. La distancia horizontal entre el punto de apoyo de la tabla en el suelo y el centro del cilindro es D. Entre el suelo y el cilindro hay un coeficiente de roce estático u1. Entre el suelo y la tabla el coeficiente de roce estático es u2. Entre el cilindro y la tabla no hay roce. ¿Cuáles son los valores mínimos de u1 y u2 para que el sistema esté en equilibrio estático?

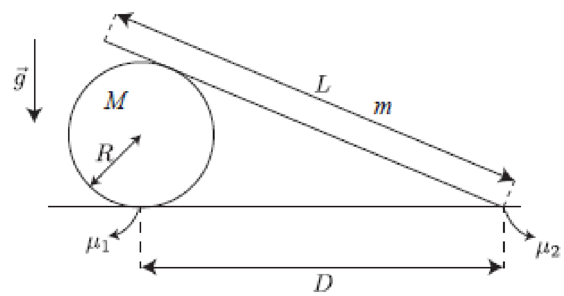

Figura 4: Tabla sobre un cilindro.

Desarrollo problema 4.-

Las ecuaciones de movimiento para el cilindro están dadas por:

$$\sum \vec{\tau_{cm}} = (...) - (\vec{r} \times \vec{R_1}) = 0 \tag{27}$$

$$\sum \vec{F_x} = R_1 - N_3 sen(\alpha) = 0 \tag{28}$$

$$\sum \vec{F_y} = N_1 - Mg - N_3 cos(\alpha) = 0 \tag{29}$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento para la barra son:

$$\sum \vec{\tau_{suelo}} = (\frac{\vec{L}}{2} \times m\vec{g}) - (\vec{D} \times \vec{N_3}) = 0 \tag{30}$$

$$\sum \vec{F_x} = -R_2 + N_3 sen(\alpha) = 0 \tag{31}$$

$$\sum \vec{F_y} = N_2 + N_3 cos(\alpha) - mg = 0 \tag{32}$$

Además se tiene la relación del roce y la normal:

$$R_1 = \mu_1 N_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{R_1}{N_1} \tag{33}$$

$$R_2 = \mu_2 N_2 \Rightarrow \mu_2 = \frac{R_2}{N_2} \tag{34}$$

Luego es importante notar, que por utilizar Leyes de Newton tenemos 6 ecuaciones con 5 incógnitas, y de las ecuaciones que se despejan los coeficientes de roce μ se observa que necesitamos 2 incógnitas para cada coeficiente, oseá necesitamos despejar 4 incógnitas de las 5.

Comentario: En la ecuación de torque del cilinro, se ha omitido una fuerza de contacto, revise que fuerza corresponde a ese término.

Hint: El problema se puede resolver sin la necesidad de utilizar la ecuación de torque del cilindro.