Pauta Auxiliar 1

Cálculo de error y método de Verlet

Prof: Claudio Falcon
Auxiliares: Felipe Cubillos, Francisco Silva, Manuel Torres
Dudas: manuel.torres@ug.uchile.cl
Fecha: 21 de Septiembre, 2018.

Problema 1.-

Calcule el error en los siguientes problemas:

- Dos resistencias cuyos valores de referencia son $R_1 = 2 \pm 0,3\Omega$ y $R_2 = 10 \pm 0,\Omega$ son puestas en serie en un circuito. ¿Cuál es la resistencia equivalente y su error asociado?
- Una puerta tiene altura $H = 2,00 \pm 0,03m$. La puerta tiene una perilla ubicada a una altura $h = 0,88 \pm 0,04m$ (desde la base de la puerta). ¿Cuál es la distancia desde la perilla de la puerta hasta la parte más alta?
- Un pájaro vuela una distancia $d = 120 \pm 3m$ en un tiempo $t = 20,0 \pm 1,2s$ ¿Cuál es la velocidad media del pájaro?
- En la caída libre de un objeto se ha medido un tiempo $t = 5 \pm 0,1s$. Se sabe que en ese lugar el valor de g es $9,87m/s^2$ ¿Cuál es la distancia recorrida por ese objeto?

Desarrollo problema 1.-

a)

$$R_1 = 2 \pm 0,3\Omega$$

$$R_2 = 10 \pm 0,4\Omega$$

Si tenemos las resistencias en serie tendremos que el cálculo de la resistencia equivalente está dado por la siguiente expresión:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Reemplazando los valores y aplicando la propagación de errores tendremos:

$$R_{eq} = (2 \pm 0,3)\Omega + (10 \pm 0,4)\Omega$$

$$R_{eq} = (2 + 10) \pm (0,3^2 + 0,4^2)^{\frac{1}{2}}\Omega$$

b)

$$H = 2,00 \pm 0,03m$$

$$h = 0,88 \pm 0,04m$$

Luego buscamos la diferencia para obtener la distancia d:

$$d = H - h$$

$$d = (2,00 \pm 0,03)m - (0,88 \pm 0,04)m$$

$$d = (2,00 - 0,88) \pm (0,03^2 + 0,04^2)^{\frac{1}{2}}m$$

c)

$$d = 120 \pm 3m$$

$$t = 20,0 \pm 1,2s$$

Sabemos que la velocidad es:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Pero asumiendo que en el tiempo inicial estaremos en el origen de nuestro sistema de referencias:

$$v = \frac{d}{t}$$

Reemplazando y propagando los errores tendremos:

$$v = \frac{(120,0 \pm \delta 3m)}{(20,0 \pm 1,2s)} = \frac{120,0}{20,0} \pm \frac{120,0}{20,0}\sqrt{(\frac{3,0}{120,0})^2 + (\frac{1,2}{20,0})^2}$$

d) Discutir qué método de propagación de errores es el más conveniente, notar que se puede proceder a propagar el error utilizando error del producto, ó también el error de una función (la idea es ver la composición de funciones de la ecuación).

Problema 2.-

Determine si falta información relevante o hay algún error evidente para cada una de las siguientes expresiones que involucran alguna cantidad física:

- La tensión de corte medida es $T = 32,131 \pm 2,2$
- La velocidad medida es $23,123212 \pm 0,210234[m/s^2]$
- Se determinó un peso igual a $0,3212 \pm 0,031[kg]$

Desarrollo problema 2.-

- A la tensión de corte le falta la unidad de medida (Newton).
- La unidad de medida de la velocidad está mal asignadas (m/s).

- La unidad de medida del peso está mal asignada, además que hay que realizar un arreglo para las cifras significativas.

Problema 3.-

Se desea predecir el movimiento de la tierra en torno al sol, para ello se sabe que en ese caso la fuerza que actúa sobre la tierra es:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

Utilice el método de Verlet para resolver las ecuaciones diferenciales (acopladas) que se desprenden de la ecuación dada. Considere los valores de las constantes conocidos con G=M=1. Además considere como condición inicial para la posición $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$, y para la velocidad $v_{x0} = 0$ y $v_{y0} = 0,5$. (Pruebe también v_{0y} =1 y 2).

`Hint`: Utilice el principio de superposición.

Desarrollo problema 3.-

Con el fin de poder tratar numéricamente, la fuerza se reescribe de la siguiente manera (considerando que se mueve en el plano XY):

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

Como tenemos en coordenadas polares que $r^2 = x^2 + y^2$, además $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$, reemplazando:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{(x^2+y^2)^{3/2}}(\vec{x}+\vec{y})$$

$$m\vec{a} = -\frac{GMm}{(x^2+y^2)^{3/2}}(\vec{x}+\vec{y})$$

Luego tenemos que $\vec{a}$ tiene componentes en los ejes X e Y, así que podemos escribirlo separando sus componentes (ppio. de spp.), tendremos las siguientes 2 ecuaciones:

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{y} = -\frac{GMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Y estas últimas ecuaciones corresponden a ecuaciones diferenciales, que además están mutuamente acopladas.

Ahora podemos realizar Verlet de segundo orden para cada expresión (EDO) obtenida, donde:

$$\ddot{x} = \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta t^2}$$

$$\ddot{y} = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{\Delta t^2}$$

Reemplazando las aproximaciones de la derivada las EDOs tendremos lo siguiente:

$$\frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta t^2} = -\frac{GMx_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{3/2}}$$

$$\frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{\Delta t^2} = -\frac{GMy_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{3/2}}$$

De donde despejando los términos i-ésimo+1 de la recurrencia podremos trabajar la expresión e ingresarla al código de MatLab para iterar.

Conclusiones:.-

- Cuando se entrega información, importa respetar un formalismo que facilite el orden sin perder información en el proceso.
- Para utilizar el Método de Verlet son necesarios n puntos iniciales conocidos para resolver una n-ésima derivada.