

Control 2

TIEMPO: 3 HORAS

Nota: Las secciones 4 y 5 deben elegir entre el problema 3 o 4. Todas las otras secciones deben responder los problemas 1,2 y 3.

P1. Considere un péndulo de torsión como el de la Figura 1 (izquierda).

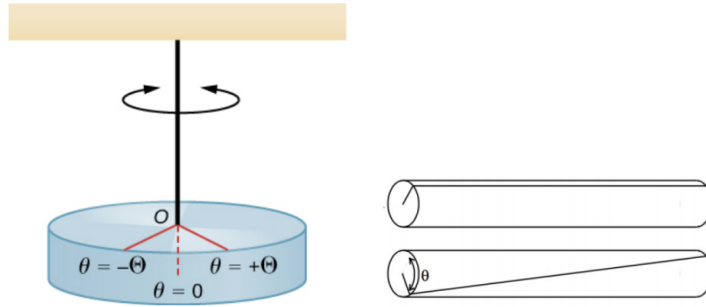


FIGURA 1

Un péndulo de torsión generalmente consiste de un disco de masa M colgado desde su punto central mediante un cable al techo. Si el disco se hace girar con respecto a su eje central torsiona el cable y con ello efectivamente se aplica un torque de igual magnitud en ambos extremos del cable. El cable a su vez ejercerá un torque de reacción en el disco que es el origen de un movimiento oscilatorio del disco. El momento de inercia de este disco con respecto a este eje es I .

En la figura 1 (derecha) se ve un cable bajo torsión: en este dibujo θ es el ángulo de deformación relativa entre sus dos extremos. En ese caso la magnitud del torque necesario para producir esa deformación es $\kappa\theta$.

Considere ahora que en vez de estar sujeto al techo, es un motor el que sujeta el cable desde su parte superior y es capaz de torsionarlo de manera que logra deformarlo en un ángulo $\phi(t) = \phi_o \sin(\omega t)$ en el momento t . Notar que el ángulo ϕ recién mencionado y el ángulo θ (ahora corresponde al de la figura 1 izquierda) son medidos con respecto a la misma dirección fija y crecen en la misma dirección también. Además considere que el disco está inmerso en un fluido lo que induce un torque disipativo $-d\dot{\theta}$.

a) Demuestre que la ecuación de movimiento del sistema tiene la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_o^2 \theta = f \sin(\omega t). \quad (1)$$

En este proceso encuentre τ , ω_o y f en función de los parámetros del sistema físico.

- b) En régimen estacionario, determine la frecuencia ω a la cual se logra la mayor amplitud de movimiento de θ .
- c) Si $\omega = \omega_o$ y las condiciones iniciales son $\theta(t=0) = \theta_o$ y $\dot{\theta}(t=0) = 0$, determine explícitamente $\theta(t)$ para todo t . Utilice que la solución general de la ecuación en a) es

$$\theta(t) = (C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t))e^{-t/2\tau} + \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad (2)$$

con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{(2\tau)^2}}$ y $\tan(\delta) = \omega/(\tau(\omega_0^2 - \omega^2))$

P2. Considere un sistema formado por dos discos de radio r (cada uno con masa m) unidos por tres resortes idénticos de constante de restitución k . En este sistema no hay gravedad ($g = 0$), y tanto el roce de los discos con la base horizontal como el roce con el aire son despreciables. La pared izquierda está fija a la base, mientras que la pared derecha puede oscilar (también sin roce) debido a un pulsador de frecuencia ω ajustable.

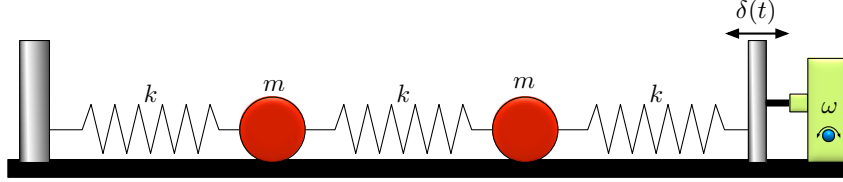


FIGURA 2

- Escriba las ecuaciones de movimiento para ambos discos, considerando que $\delta(t) = \delta_0 \sin(\omega t)$. Simplifique su escritura definiendo $\omega_0^2 \equiv k/m$.
- Considere las siguientes soluciones de prueba: $x_i(t) = A_i \sin(\omega t)$, con $i = 1, 2$, medidas con respecto a las posiciones de equilibrio de ambos discos. Encuentre las amplitudes A_1 y A_2 en términos de δ_0 , ω_0 y ω .
- Determine las dos frecuencias de resonancia para este sistema.
- En las expresiones para A_1 y A_2 (parte b), reemplace las dos frecuencias de resonancia ligeramente desplazadas: $\omega^2 = \omega_j^2 - \epsilon$, con $j = 1, 2$ y $\epsilon \ll \omega_j^2$. Determine la relación entre A_1 y A_2 para ambas resonancias, y bosqueje la oscilación del sistema.
- ¿Cómo es el movimiento del sistema cuando $\omega^2 = 2\omega_0^2$?

P3. Una cuerda de densidad lineal de masa constante ρ_o y largo L se fija en un extremo y es tensionada utilizando un motor que se coloca a una distancia d del otro extremo de la cuerda y sólo afecta a la cuerda en ese punto. Este motor hace girar una masa m con una velocidad angular Ω en un plano cuya normal sigue a la parte de la cuerda horizontal, como muestra la figura 3. Con esto

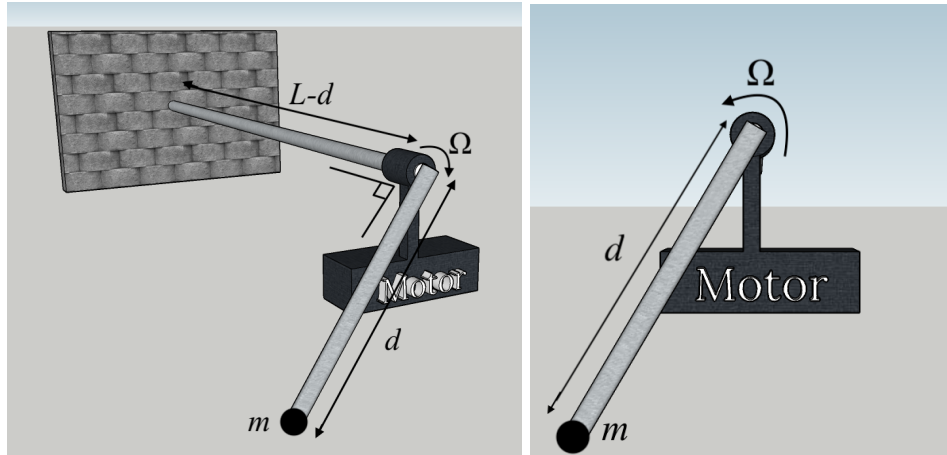


FIGURA 3. Izquierda: Vista lateral. Derecha: vista frontal.

- Calcule la velocidad de propagación de la onda en la cuerda en función de los parámetros del problema.

- b) Con el motor en d , cómo debe cambiar Ω para que el tiempo τ que toma una perturbación en ir desde un extremo de la cuerda hasta el otro no cambie si se acorta la cuerda a la mitad?
- c) Podemos usar ahora el motor para medir la densidad de diferentes cuerdas. Imagine que Ud. tiene dos cuerdas de largo L cuyas densidades ρ_1 y ρ_2 son desconocidas. Cómo usaría el motor para conocer la densidad de ambas cuerdas?

P4. Un resorte de constante elástica k y largo natural l_o se dispone en forma horizontal. Uno de sus extremos está unido a una pared y el otro al centro de un disco de masa M y radio R . El disco se mueve sobre una superficie horizontal existiendo entre ambos un coeficiente de roce estático μ_e . El resorte es comprimido una distancia d y luego se suelta desde el reposo (ver figura).

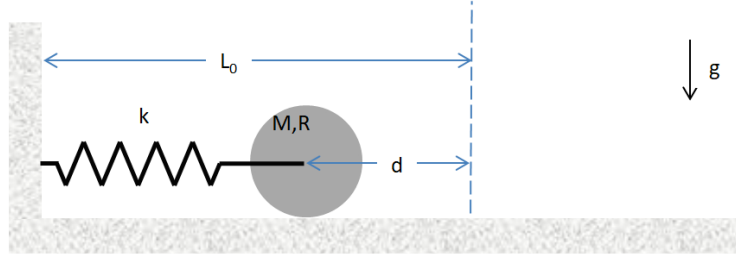


FIGURA 4

- a) Determine la máxima distancia d que garantice que durante el movimiento exista rodadura perfecta.
- b) Determine la velocidad del centro de masa del disco cuando éste pasa por su largo natural.
- c) Determine el tiempo que tarda el sistema en completar una oscilación.

Pauta Control 2

P1.

- a) Movimiento rotacional del disco:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= Torque = Torque_{cable} + Torque_{fluido} \\ &= \kappa(\phi(t) - \theta) - d\dot{\theta}, \end{aligned}$$

con $\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t)$. Re-ordenando la ecuación:

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta}/\tau + \omega_0^2 \theta = f \sin(\omega t),$$

con $\tau = I/d$, $\omega_0^2 = \kappa/I$, $f = \phi_0 \kappa/I$.

- b) Corresponde a amplitud estacionaria máxima, o un ω^* tal que $B(\omega)$ es máximo, o $dB/d\omega|_{\omega^*} = 0$, que da la condición:

$$0 = 2\omega^*[-2(\omega_0^2 - (\omega^*)^2) + 1/\tau^2]$$

es decir

$$(\omega^*)^2 = \omega_0^2 - 1/2\tau^2$$

- c) Para estas condiciones iniciales $\delta = \pi/2$, y $\theta(t)$ queda:

$$\theta(t) = (C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t))e^{-t/2\tau} - (f\tau/\omega_0) \cos(\omega_0 t)$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= C - (f\tau/\omega_0) \\ 0 &= -C/2\tau + D\Omega, \end{aligned}$$

entonces $C = f\tau/\omega_0 + \theta_0$, y $D = f/(2\omega_0\Omega) + \theta_0/(2\tau\Omega)$. Es decir

$$\theta(t) = ((f\tau/\omega_0) + \theta_0)[\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t)/(2\tau\Omega)]e^{-t/2\tau} - (f\tau/\omega_0) \cos(\omega_0 t)$$

P2.

a)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 &= \omega_0^2 \delta(t) \end{aligned}$$

b)

$$A_1 = \frac{\omega_0^4 \delta_0}{[(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4]}, \quad A_2 = \frac{\omega_0^2(2\omega_0^2 - \omega^2)\delta_0}{[(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4]}$$

c)

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega^2 = (2 \pm 1)\omega_0^2 : \omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = 3\omega_0^2$$

d)

$$\begin{aligned} A_1, A_2 \rightarrow \frac{\omega_0^2 \delta_0}{2\epsilon} : A_1 = A_2, \quad \text{modo normal en fase.} \\ A_1 \rightarrow \frac{-\omega_0^2 \delta_0}{2\epsilon}, A_2 \rightarrow \frac{\omega_0^2 \delta_0}{2\epsilon} : A_1 = -A_2, \quad \text{modo normal en antifase.} \end{aligned}$$

e)

$$A_1 = -\delta_0, A_2 = 0 \Rightarrow A_1(t) = -\delta(t) \text{ y } A_2(t) = 0 .$$

Es decir, el sistema se transforma en un sistema efectivo de 3 masas, excitándose un modo (segundo, de tres) que tiene un nodo en el centro y amplitudes opuestas en los extremos. La fuerza neta sobre la segunda masa es completamente cancelada:

$$k(A_1(t) - A_2(t)) + k(\delta(t) - A_2(t)) = 0 .$$

P3.

- a) La masa da vueltas en un movimiento circular uniforme por acción del motor. La ecuación de movimiento de la masa m es siguiendo a la cuerda es:

$$m\Omega^2 d = T \quad (1)$$

Con esto, la velocidad de propagación $c_o = \sqrt{\frac{m\omega^2 d}{\rho_o}}$.

- b) El tiempo de propagación $\tau_1 = (L-d)/c_o$. Ahora si la cuerda baja su distancia a la mitad entonces el nuevo tiempo será $\tau_2 = (L-2d)/2c_1$. Entonces, como ρ_o , d y m son constantes, entonces

$$\frac{L-d}{\Omega} = \frac{L-2d}{2\Omega'} \quad (2)$$

Así la nueva velocidad angular es $\Omega' = \frac{L-2d}{2(L-d)}$.

- c) Sabemos la velocidad $c_1 = \sqrt{\frac{m\Omega^2 d}{\rho_1}}$ en una cuerda. Realizando el mismo experimento en la otra cuerda podemos ajustar la velocidad Ω para que la velocidad sea la misma. Así encontramos la razón de las densidades. Luego se cambia la velocidad Ω en la cuerda de densidad ρ_1 , lo que cambia Ω y con ello se sabe la densidad.

P4.

- a) Tomando un sistema de coordenadas tal que $x = 0$ en el largo natural,

$$M\ddot{x} = -kx - f_{re}$$

Haciendo sumatoria de torque en el punto de apoyo del disco

$$\begin{aligned} \sum \vec{\tau}_p &= R\hat{j} \times (-kx)\hat{i} \\ -\ddot{\theta}\hat{k} &= \frac{Rkx\hat{k}}{I_p} \end{aligned} \quad (3)$$

con

$$I_p = MR^2 + \frac{MR^2}{2} = \frac{3MR^2}{2} \quad (4)$$

Imponiendo la condicion de rodadura,

$$R\ddot{\theta} = \ddot{x} \quad (5)$$

y reemplazando en la ecuacion de momentum

$$-\frac{1}{3}kx \leq \mu Mg$$

encontramos entonces que la condicion se satisface si

$$d \leq \frac{3\mu Mg}{k}$$

b) Aplicando conservacion de la energia mecanica

$$E_i = \frac{1}{2}kd^2 = E_f = \frac{1}{2}I_p\omega_f^2$$

de aqui

$$v_f^2 = \frac{2k}{3M}d^2$$

empleando d_{max}

$$v_f = \sqrt{\frac{6M}{k}}\mu g$$

c) Haciendo uso de las ecuaciones 3, 4 y 5 de la parte (a) se tiene que

$$2\frac{Rkx}{3MR^2} + \frac{\ddot{x}}{R} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3M}x = 0$$

por lo tanto $\omega^2 = \frac{2k}{3M}$ y el periodo de la oscilacion es $T = T_0\sqrt{\frac{3}{2}}$, donde T_0 es el periodo de oscilacion de una masa M que cuelga de un resorte de constante k .