Control 1

Sistemas Newtonianos FI1002 - Primavera 2018

Todas las secciones

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

Pregunta 1

a) Se pide el centro de masas $\vec{R}_{CM}$ y el momento de inercia I_o de la placa respecto al punto arbitrario en la diagonal. Sabiendo que la diagonal es $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces $\vec{R}_{CM} = \lambda d(\sin(\theta)\hat{\imath} - \cos(\theta)\hat{\jmath})$, con θ el angulo que forma $\vec{R}_{CM}$ con la vertical utilizando $\hat{\imath} = (1, 0)$ y $\hat{\jmath} = (0, 1)$.

Con esto, usando el teorema de Steiner, $I_o = I_{CM} + M\lambda^2 d^2$. Utilizando el teorema de los ejes perpendiculares tenemos que $I_{CM} = \frac{1}{12}M((2a)^2 + (2b)^2) = \frac{M}{3}d^2$. Así $I_o = Md^2(\lambda^2 + \frac{1}{3})$ (1pt).

b) La energía potencial que tiene la placa en la figura b) del problema 1 es $E_i = Mg\lambda b$. Cuando pasa por su mínimo de energía potencial, la energía total es $E_f = \frac{1}{2}I_o\omega_f^2 - Mg\lambda d$. Así

$$\omega_f(\lambda) = \sqrt{\frac{2Mg(b+d)\lambda}{I_o}} \tag{1}$$

y por tanto la velocidad tangencial $v_{CM} = \lambda d\omega_f(\lambda)$. Además $\omega_f(\lambda = 0)0$ (1.5pt).

c) Escribiendo

$$\omega_f(\lambda) = \sqrt{\frac{2Mg(b+d)\lambda}{Md^2(\frac{1}{3} + \lambda^2)}} = \sqrt{\frac{2g(b+d)}{d^2}} \times \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2 + \frac{1}{3}}} \tag{2}$$

vemos que el máximo de $\omega_f(\lambda)$ ocurre cuando $\frac{d\omega_f(\lambda=\lambda_c}{d\lambda} = 0$ para $\lambda_c = \sqrt{1/3}$ (1pt).

d) Para calcular la aceleración tangencial del centro de masa y angular de la placa en función del ángulo θ, tomamos torque desde el pivote. Así

$$I_o\alpha\hat{k} = -\lambda dMg\sin(\theta)\hat{k} \tag{3}$$

con $\hat{k}$ un vector que sale del plano y con el lado derecho de la ecuación (3) el torque del peso (con el signo definido por el producto cruz). Despejando, encontramos que $\alpha(\theta) = -\frac{\lambda}{\lambda^2+\frac{1}{3}}\frac{g}{d}\sin(\theta)$ y $a_{CM}(\theta) = \alpha(\theta)\lambda d = -\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\frac{1}{3}}g\sin(\theta)$ (1pt).

e) Utilizando las ecuaciones de la estática, encontramos que con respecto al pivote solo los torques del peso de la placa de masa M y de la masa extra m importan, de tal manera que

$$\lambda dMg = (1-\lambda)mg \tag{4}$$

Así, $= m/(m+M)$. En el caso en que $m \to 0$, la placa no se mueve porque el brazo de giro es cero. En el caso en que $M \to$, $\lambda \to 1$ la placa no cae porque no tiene masa y el centro de masa del problema es el de la masa m. Cuando $m = M$, se queda quieta la placa porque la misma masa está puesta la misma deistancia tanto de la placa como de la masa puntual.

Pregunta 2

La ecuación de movimiento de una partícula browniana es

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + f(t), \tag{5}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v(t) + \frac{f(t)}{m}, \tag{6}$$

con $\gamma/m = 10^6$ s^{-1}. Utilizando el método de Verlet discretizamos el tiempo con un paso $\Delta t = 10^{-7}$ s de tal manera que $t_i = i\Delta t$. Así definimos $v(t_i) = v_i$, discretizamos la derivada temporal como

$$\frac{dv(t)}{dt} \to \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}, \tag{7}$$

por lo que la ecuación (6) se escribe para v_{i+1} como

$$v_{i+1} = v_i - (\frac{\gamma}{m}\Delta t)v_i = (1 - \frac{\gamma}{m}\Delta t)v_i, \tag{8}$$

con $(\gamma/m)\Delta t = \beta = 0{,}1$. Iterando la ecuación 4 veces para pasar desde $v_1 = 5 \times 10^{-6}$ μm a $v_5 = (1-\beta)^4 v_1 \simeq 3 \times 10^{-6}$ μm (3pt).

Luego, utilizando la tabla

v (μm/s)	5.0	4.0	5.0	5.0	6.0	5.0	4.0	5.0	6.0	5.0
n (veces)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

calculamos el promedio

$$\bar{v} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} v_i = \frac{1}{10} \times (6 \times 5{,}0 + 2 \times (4{,}0 + 6{,}0)) = \frac{1}{10} \times (10 \times 5{,}0), \tag{9}$$

lo que entrega $\bar{v} = 5{,}0$ μm/s, y la desviación estándar

$$\sigma(v) = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(v_i - \bar{v})^2}, \tag{10}$$

lo que entrega $\sigma(v) = \sqrt{0{,}4} \simeq= 0{,}7$ μm/s. Con esto encontramos que la desviación estándar de la fuerza viscosa es $\sigma(\gamma v) = \gamma\sigma(v) \simeq 7 \times 10^{-15}$ N $> \sigma(f) = 10^{-15}$ N (3pts).

Pregunta 3

Realizando el cálculo del torque en el centro del disco (considerando el disco como su versión completa) se tiene el siguiente diagrama de fuerzas:

Se obtiene la ecuación genérica en función de los radios desde el punto hacia las normales, y hacia el centro de masas, quedando:

$$\sum \vec{\tau_o} = r_{N_1} \times \vec{N_2} + r_{N_2} \times \vec{N_2} + \vec{r_{cm}} \times m\vec{g} = I_o\vec{\alpha} \tag{11}$$

Luego, se puede observar que en dicho punto, el torque provocado por ambas normales es nulo, debido a que el ángulo formado entre el radio y la fuerza respectiva es cerrado, por lo que $sen(\theta_i) = 0$ en dichos casos, por lo que el término del torque es nulo

$$\sum \vec{\tau_o} = \vec{r_{cm}} \times m\vec{g} = I_o\vec{\alpha} \tag{12}$$

$$\sum \vec{\tau_o} = r_{cm}mgsen(\frac{\pi}{2} - \theta_o) = I_o\alpha \tag{13}$$

$$\sum \vec{\tau_o} = r_{cm}mgsen(\frac{\pi}{2} - \theta_o) = I_o\alpha \tag{14}$$

$$\sum \vec{\tau_o} = r_{cm}mgcos(\theta_o) = I_o\alpha \tag{15}$$

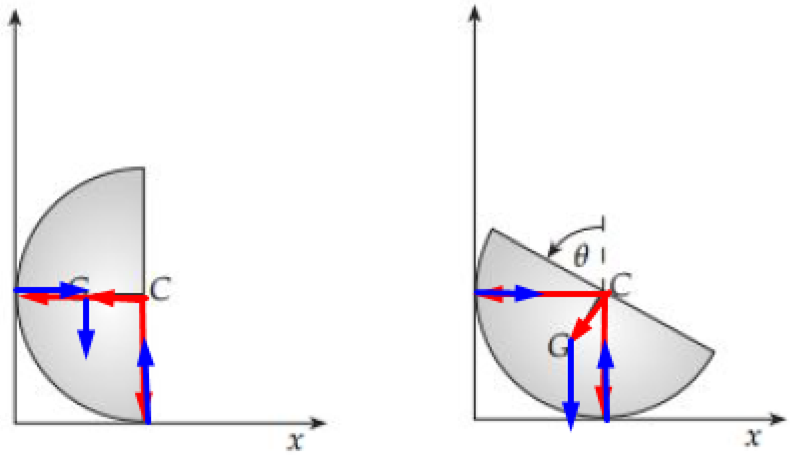

Figura 1: Izquierda: DCL en un tiempo t=0. Derecha: DCL en un tiempo t*

Por otro lado, realizando la suma de fuerzas quedan las siguientes expresiones:

$$\sum F_x = N_1 = ma_{cm,x} \tag{16}$$

$$\sum F_y = N_2 - mg = ma_{cm,y} \tag{17}$$

Luego, cuando se pierde el contacto con la pared, la N_1 será nula, entonces:

$$\sum F_x = N_1 = ma_{cm,x} = 0 \tag{18}$$

Por lo que la única aceleración que tiene el centro de masas está dada por la aceleración del eje y, luego:

$$\alpha r_{cm} = a_{cm,y} \tag{19}$$

Luego, reemplazando la ecuación 9 en la ecuación 7 queda:

$$\sum F_y = N_2 - mg = mr_{cm}\alpha \tag{20}$$

$$\frac{N_2 - mg}{mr_{cm}} = \alpha \tag{21}$$

Ya que luego de recorrer θ_o, el cuerpo deja de rodar y se desplaza horizontalmente, se puede afirmar que $\alpha_o = 0$

$$\alpha_o = 0 \qquad (1pt) \tag{22}$$

Por lo tanto, de la ecuación 11 se desprende que si $\alpha_o = 0$, $N_2 = mg$, por lo tanto no hay aceleración en el eje Y, lo que nos da indicios que no sigue rotando (cuando rota con centro de giro el punto O, el centro de masas tiene aceleración lineal en el eje X y en el eje Y). Volviendo al problema, como la aceleración angular es nula, la ecuación 5 también es nula luego de evaluar α_o

$$\sum \vec{\tau_o} = r_{cm}mgcos(\theta_o) = 0 \tag{23}$$

Luego, a partir de la ecuación 13 es posible despejar θ_o

$$\theta_o = \frac{\pi}{2} \qquad (1pt) \tag{24}$$

Comenzando desde el reposo y colocando la referencia de la energía potencial en la posición inicial del centro de masas, se tiene que:

$$E_i = 0 \tag{25}$$

Luego cuando se desprende, se tiene que la energía mecánica es:

$$E_f = \frac{I_o w_o^2}{2} + mgx_{cm} \tag{26}$$

Luego:

$$0 = \frac{I_o w_o^2}{2} - mg\frac{4R}{3\pi} \tag{27}$$

$$w_o^2 = 2mg\frac{4R}{3\pi I_o} \qquad (1pt) \tag{28}$$

Como se sabe gracias a las ecuaciones 8 y 11, ambas componentes de la aceleración del centro de masas del cuerpo son nulas, además que por conservación de la energía mecánica se tiene que en el instante cuando llega girando y el instante cuando se traslada, la energía se conserva, por lo tanto:

$$\frac{I_o w_o^2}{2} + mgx_{cm} = \frac{mv_{cm}^2}{2} + mgx_{cm} \tag{29}$$

$$\frac{I_o w_o^2}{2} = \frac{mv_{cm}^2}{2} \tag{30}$$

$$v_{cm}^2 = \frac{I_o w_o^2}{m} \qquad (3pt) \tag{31}$$

Otra forma de verlo, es que al inicio, el sistema comienza desde el reposo con cierta energía mecánica, pero ya que hay un torque dicho sistema comienza a acelerar y pierde energía potencial, ganando energía cinética rotatoria, pero cuando se desprende y deja de rotar, transforma toda la energía cinética rotatoria en energía cinética traslacional.