FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
FI1002-4 Sistemas Newtonianos

Auxiliar 8: Oscilaciones amortiguadas y forzadas

Profesor: René Garreaud S.
Auxiliares: Martín Bataille, M. Ignacia Reveco, Lucas González

12 de noviembre 2018

1. Resumen

1.1. Movimiento armónico simple y amortiguado

El caso estudiado en la auxiliar anterior corresponde a las oscilaciones simples donde la ecuación de movimiento y su solución son:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Comenzaremos a estudiar casos donde existe una fuerza de roce de la forma $F = -b\vec{v}$. Como consecuencia de esta fuerza aparece un nuevo término en la ecuación de movimiento y la solución cambia un poco:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x \qquad x(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\Omega t + \phi)$$

En la forma anterior τ corresponde al tiempo característico o tiempo de atenuación. Mientras mayor es el valor de τ, mayor es el tiempo de atenuación por lo que menor es el efecto del roce. Notemos también que cambiamos la frecuencia ω_0 por $\Omega = \omega_0^2 - (\frac{1}{2\tau})^2$, esto significa que el roce tambien provoca que las oscilaciones sean más lentas.

1.2. Oscilaciones forzadas

Un nuevo caso que aparece mucho en el día a día son las oscilaciones forzadas. Un típico ejemplo es el de una niña balanceándose en un columpio y su papá la empuja para que vaya más rápido y llegue más alto. La fuerza que ejerce el papá sobre la niña se puede modelar como $F = f\sin(\omega t)$. La ecuación de movimiento y la solución quedan entonces:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f\sin(\omega t) \qquad x(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\Omega t + \phi) + \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}\sin(\omega t - \delta)$$

La solución queda mucho más complicada que antes pero no hay que entrar en pánico! Podemos identificar dos términos, el primero es idéntico que en el caso de una oscilación amortiguada y decae en el tiempo. En cambio, el segundo término tiene una amplitud que se mantiene mantiene constante en el tiempo pero que depende de ω (la frecuencia a la que el papá empuja a la niña). En particular, si $\omega \to \omega_0$ la amplitud se hace máxima y se produce la famosa *resonancia*. Además, podemos ver que si hay muy poco roce y τ es muy grande entonces cuando hay resonancia la amplitud tiende a infinito, es decir que la niña sale volando!!

2. Problemas

P1. [P1 Control 2 2017-2] Un objeto de masa $m = 0{,}5$ kg está sujeto a un resorte de constante elástica $k = 2{,}5$ N/m. El objeto está sobre una superficie cubierta con aceite que causa un roce viscoso en el objeto de la forma $\vec{F} = -b\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad del objeto con respecto a la superficie y b es una constante desconocida. Después de que el objeto se suelta desde el reposo a una distancia $A_0 = 15$ cm de su posición de equilibrio, este realiza oscilaciones amortiguadas. Después de 3 s la amplitud de su movimiento es 7 cm. Al respecto, determine:

a) la frecuencia natural de las oscilaciones

b) la constante de roce viscoso b

c) la frecuencia con que el objeto oscila alrededor de su posición de equilibrio

d) el tiempo necesario para que la amplitud de las oscilaciones decaiga a $1{,}5$ cm.

e) Grafique el movimiento del objeto entre $t = 0$ y $t = 6$, indicando claramente el periodo y el tiempo de decaimiento.

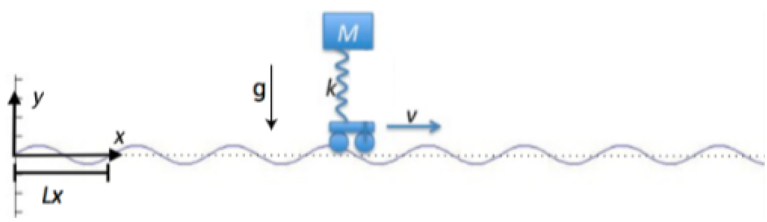

Figura 1: Camioneta sobre un camino con calaminas

P2. Considere una camioneta que se desplaza por un camino recto cuya superficie presenta ondulaciones verticales (calamina) tales que su amplitud respecto de un nivel de referencia está dada por:

$$y_c = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L_x} x\right)$$

La camioneta se desploza por el camino con velocidad constante v en el eje x. El sistema de suspensión de la camioneta puede ser modelado como un resorte de constante elática k y de largo natural l_0 que soporta prácticamente toda la masa M de la camioneta y que cuenta con un mecanismo que produce una fuerza $F = -b\dot{y}$.

a) Muestre que la frecuencia de forzamiento ω del acoplado está dada por $\omega = 2\pi v/L_x$.

b) Encuentre la ecuación de movimiento para la posición y del acoplado. Use un cambio de variable adecuado para que la fuerza de gravedad y la longitud natural del resorte no aparezcan explícitamente en le ecuación de movimiento.

c) Realice un bosquejo de la amplitud de la oscilación de la camioneta.

d) Martín quiere construir su propia camioneta. ¿Debería buscar que el sistema de suspensión minimice o maximice el valor de τ?

P3. [Propuesto] Un carro de largo $2l_c$ y masa M puede deslizar sin roce por un riel de largo L. El carro tiene fijo, a cada lado, uno de los extremos de un resorte ideal (masa nula), de constante elástica k y largo natural l_0. El extremo libre de cada resorte se fija a dos paredes ubicadas en los extremos del riel. Se tiene, así, un sistema resorte-carro-resorte. Sobre el carro se monta un motor, capaz de hacer girar con velocidad angular ω un brazo de masa despreciable y largo R en cuy extremo hay una masa m.

a) Encuentre la posición del centro de masa del sistema en función de la coordenada x del centro de carro, medida desde la pared izquierda del riel.

b) Encuentre la ecuación de movimiento

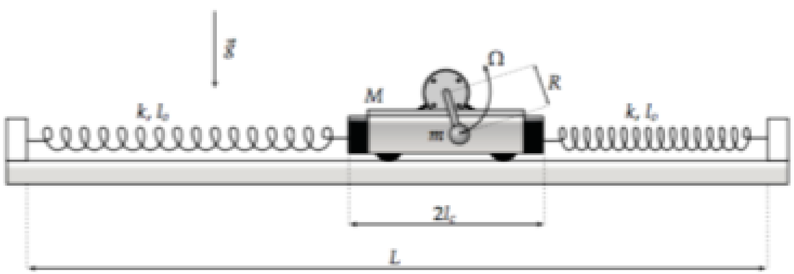

Figura 2: Diagrama del sistema resorte-carro-resorte