NACHA

Aux # 9 - ondas propagativas

- ecuación general de ondas: $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}$

donde $y = y(x,t)$ es la posición vertical para cierta posición horizontal x en cierto instante t.

- Cuerda: $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_L}}}$ Donde T es tensión $[N]$ y ρ_L es la densidad lineal de la cuerda $[kg/m]$

- Solución de D'Alembert: $\boxed{y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)}$

es solución de la ec. gral. de ondas, donde $f(x-ct)$ representa una onda que se propaga hacia la derecha, y $g(x+ct)$, describe una onda que se propaga hacia la izquierda.

* Velocidad vertical de las partículas de una cuerda durante una onda propagativa $\quad v_y = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t)$

* Velocidad horizontal de la onda de una cuerda durante una onda propagativa $\quad v_x = c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_L}}$

P1)

$$y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2}$$

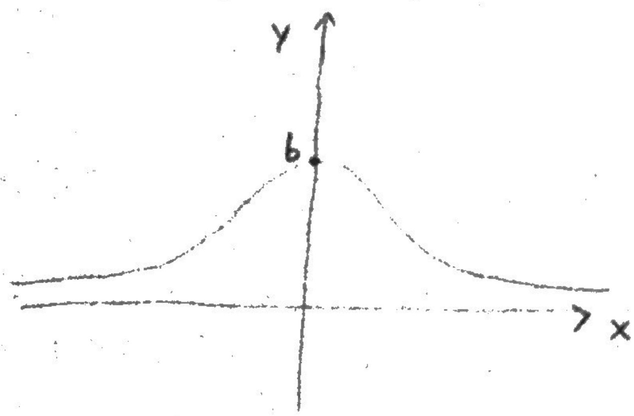
(a) en $t=0$, $y(x,0) = \dfrac{b^3}{b^2+4x^2}$

- Notar que en $x=0$

  $y(0,0) = b$

- Como $b>0$, $x^2>0$

  $\Rightarrow y(x,0) > 0, \ \forall x$



- paridad

  $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ par

  (simetrica c.r. a y)

(b) velocidad del pulso y su sentido.

Escribir $y(x,t) = f(x-ct)$ ó $g(x+ct)$

Notar que

$$y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + \left(2\left(x - \frac{u}{2}t\right)\right)^2} = f(x-ct)$$

$\Downarrow$

donde $\boxed{c = \frac{u}{2}}$

Sentido hacia la derecha

(c) $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = + \frac{2b^3 \cdot (2x - ut) \cdot u}{\left[b^2 + (2x-ut)^2 \right]^2}$

evaluando en $t=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_y = \frac{4b^3 u x}{(b^2+4x^2)^2}}$

P2 $y(x,t) = 4 \sin(2x - t)$

(a) también podemos obtener c a partir de la ecuación de onda

- $\frac{\partial y}{\partial t} = -4\cos(2x-t)$
- $\frac{\partial y}{\partial x} = 8\cos(2x-t)$
- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -4\sin(2x-t)$
- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -16\sin(2x-t)$

$\Rightarrow$ reemplazando en $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$

$\Rightarrow \cancel{-}4 \cancel{\sin(2x-t)} = c^2 \cdot (\cancel{-}16 \cdot \cancel{\sin(2x-t)})$

$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\boxed{c = \frac{1}{2}}$

(b) Notar que

$$y(x,t) = 4\sin(2x-t)$$

$$= 4\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}t\right)\right) \quad c = \tfrac{1}{2} \;\checkmark\checkmark$$

↳ sentido hacia la derecha.

(c) velocidad transversal: $\dfrac{\partial y}{\partial t} = v_y = -4\cos(2x-t)$

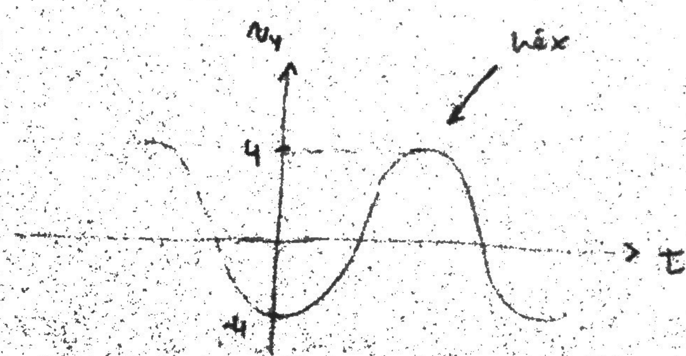
velocidad es máxima cuando $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$$\Rightarrow -16\sin(2x-t) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2x-t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \text{etc}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2x \\ t_2 = 2x-\pi \end{cases}$$

evaluar t_1 y t_2 en v_y



$$v_y(t_1) = -4$$

$$v_y(t_2) = 4$$

velocidad máxima transversal

P3

$L = 10\ m$

$\rho = 3\ kg/m$

$T = 12\ N$

$$v_A = \begin{cases} 0, & t<0,\ t>3s \\ 1\ cm/s, & 0<t<2s \\ -2\ cm/s, & 2s<t<3s \end{cases}$$

$$v_B = \begin{cases} 0, & t<0,\ t>3s \\ 2\ cm/s, & 0<t<1s \\ -4\ cm/s, & 1s<t<2s \\ 2\ cm/s, & 2s<t<3s \end{cases}$$

(a) grafican $y(x)$ en $t=3s$

(b) grafican $v_y(x)$ en $t=3s$

(a) tenemos que $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{12\ N}{3\ kg/m}} = 2\ m/s = v_x$

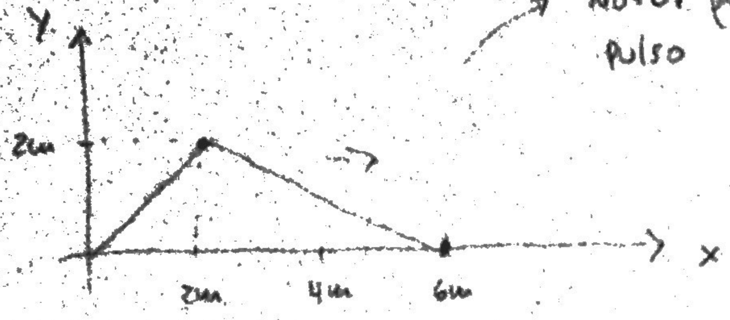
analizar pistones por separado:

- Pistón A

$$0<t<2s \begin{cases} \Delta x_1 = v_x \cdot \Delta t = 2\ m/s \cdot 2s = 4\ m \\ \Delta y_1 = v_y \cdot \Delta t = 1\ cm/s \cdot 2s = 2\ cm \end{cases}$$

$$2s<t<3s \begin{cases} \Delta x_2 = v_x \cdot \Delta t + x_1 = 2\ m/s \cdot 1s = 2\ m \\ \Delta y_2 = v_y \cdot \Delta t + y_1 = -2\ cm/s \cdot 1s = -2\ cm \end{cases}$$

$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 6\ m \rightarrow$ tamaño del pulso en $t=3$



Notar que en este gráfico la forma del pulso es triangular, NO curvo. Esto se debe a que para cierto Δt la velocidad transversal es cte

ie $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} = cte \quad / \int dt$

Cuerda según pistón A en $t=3s$

$\therefore \quad \underbrace{y(x,t) = (cte)\cdot t + X}_{\text{es una recta !}}$

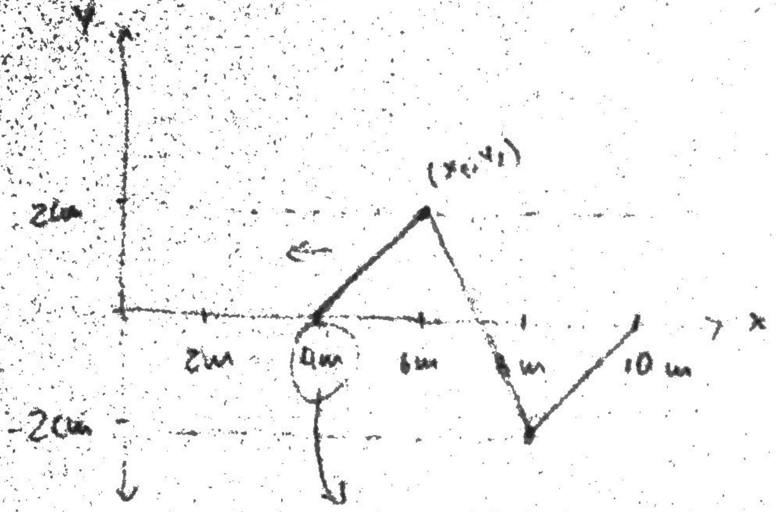
- **Pistón B**

$0 < t < 1s \quad \begin{cases} \Delta X_1 = v_x \cdot \Delta t = 2m/s \cdot 1s = 2m \\ \Delta Y_1 = v_y \cdot \Delta t = 2cm/s \cdot 1s = 2cm \end{cases}$

$1s < t < 2s \quad \begin{cases} \Delta X_2 = v_x \cdot \Delta t = 2m/s \cdot 1s = 2m \\ \Delta Y_2 = v_y \cdot \Delta t = -4cm/s \cdot 1s = -4cm \end{cases}$

$2s < t < 3s \quad \begin{cases} \Delta X_3 = v_x \cdot \Delta t = 2m/s \cdot 1s = 2m \\ \Delta Y_3 = v_y \cdot \Delta t = 2cm/s \cdot 1s = 2cm \end{cases}$

★ PERO, recordar que el pistón B se ubica en el otro extremo de la cuerda (lado derecho) por lo que el pulso se propaga hacia la izquierda.



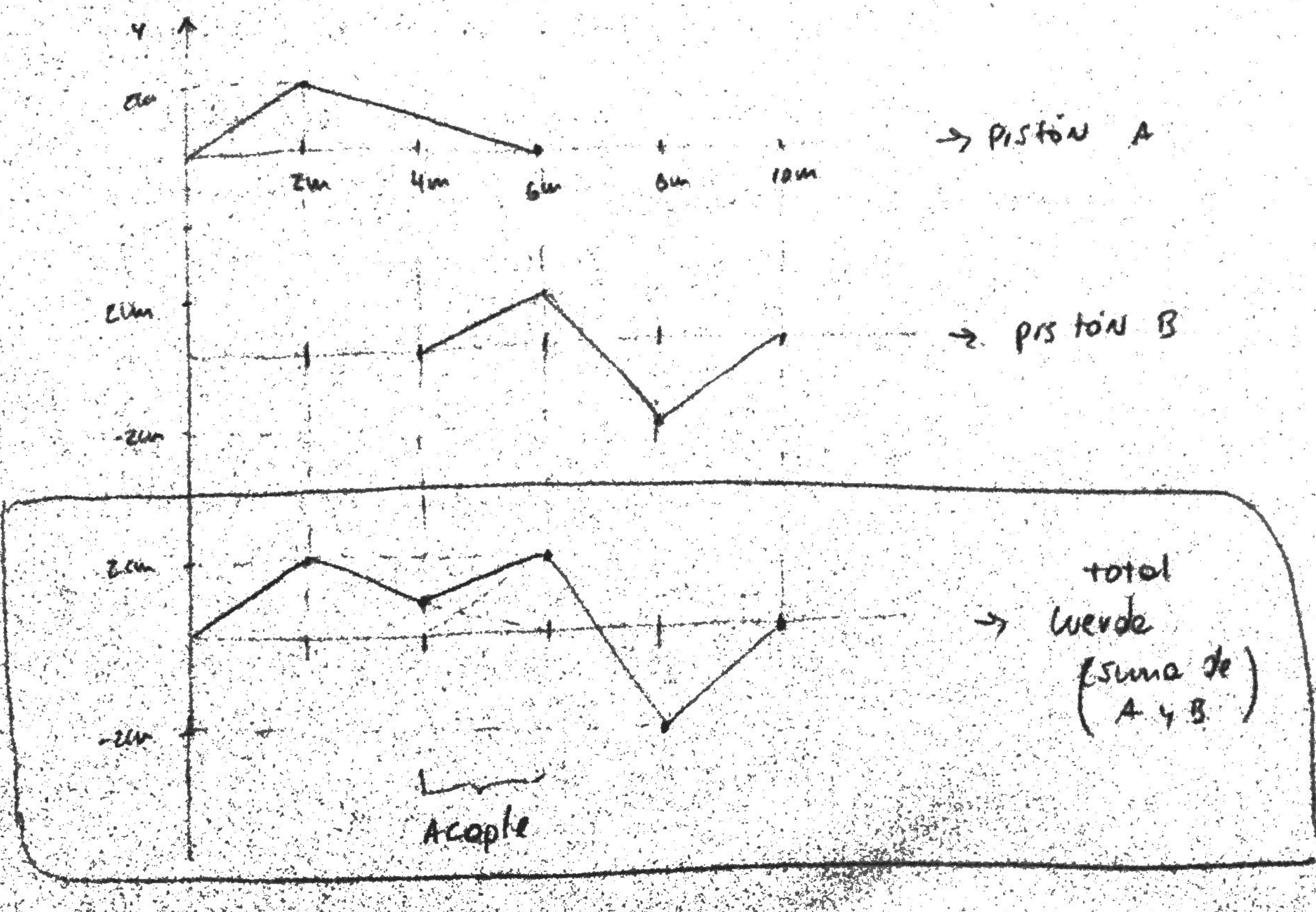
← cuerda según pistón B en $t = 3$ s

Sería el "cero", a donde comienza a moverse, dado que la cuerda tiene $L = 10$ m

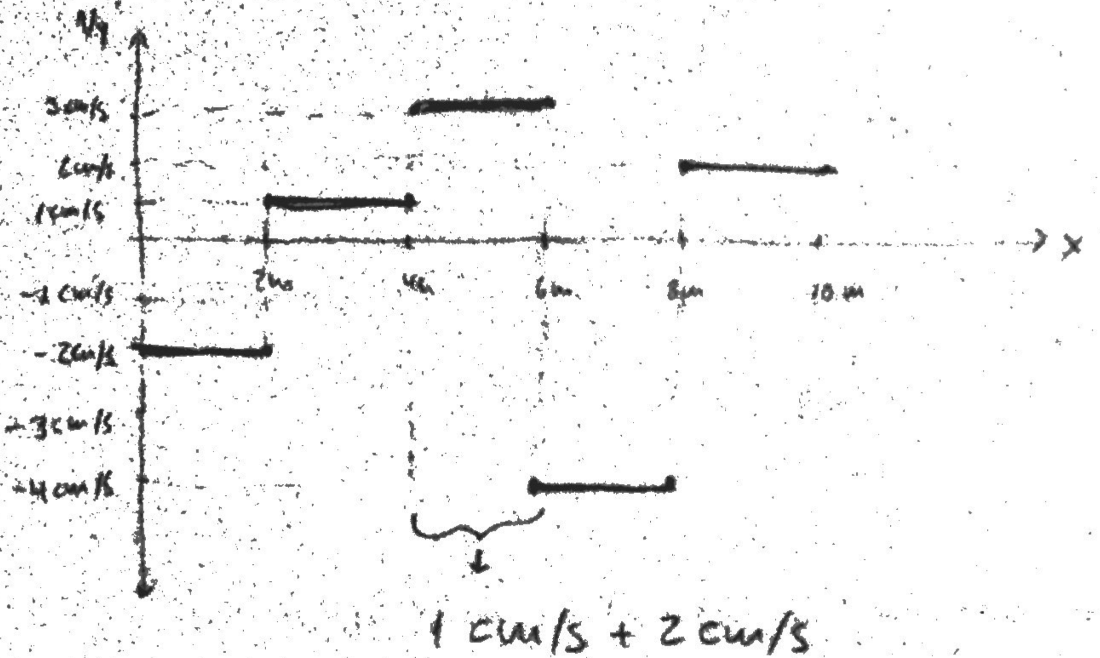
$\Rightarrow 10\text{ m} - 6\text{ m} = 4\text{ m}$

$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 6\text{ m}$

Ahora, hay que superponer ambos pulsos, dado que se pide la forma de la cuerda:



(b) graficar $v_y(x)$ en $t = 3\,s$



La velocidad vertical será igual a la de los pistones en las zonas no acopladas. En la zona acoplada se suman las velocidades