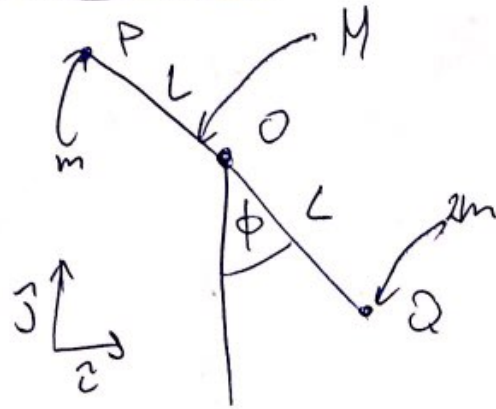


Auxiliar S: Torque y $\vec{L}$

P₁

DCL



Calculamos el torque respecto al centro de la barra (el punto "O"):

~~Primero calculamos~~

$$\tau_o = \tau_Q + \tau_P$$

Donde: $\tau_Q = \vec{r}_Q \times \vec{L}_{mg}$

$$\tau_P = \vec{r}_P \times m\vec{g}$$

$$\vec{r}_Q = L \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_P = L \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{r}_Q$$

luego, $\tau_o = -L \sin \phi \cdot 2mg \hat{k} + L \sin \phi \cdot mg \hat{k}$
 $= -mgL \sin \phi \hat{k}$

Aplicamos $\tau_o = \frac{dL_o}{dt}$

con ~~de~~ $L_o =$ ~~de~~ Momento angular de todo el sistema

$$= L_{\text{barra}} + L_Q + L_P$$

$$= (I\omega + 2ml^2\omega + ml^2\omega)k$$

$$= \left(\frac{1}{12} M (2L)^2 \omega + 3m\omega L^2 \right)$$

$$= \omega L^2 \left(\frac{1}{3} M + 3m \right)$$

Igualamos:

$$\hat{k} \quad -mgl \sin \phi = \frac{d}{dt} (\omega L^2 (\frac{M}{3} + 3m))$$

Recordemos que $\omega = \dot{\phi}$

$$-mgl \sin \phi = \ddot{\phi} L^2 (\frac{M}{3} + 3m)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{-mgl \sin \phi}{\frac{M}{3} + 3m}$$

b) Si $m \gg M$: $\frac{M}{3} + 3m \approx 3m$, por lo tanto,

$$\ddot{\phi} = \frac{-mgl \sin \phi}{3m} = -\frac{gl \sin \phi}{3}$$

Si $M \gg m$: $\frac{M}{3} + 3m \approx \frac{M}{3}$, por lo tanto,

$$\ddot{\phi} = \frac{-mgl \sin \phi}{\frac{M}{3}} = -3gl \sin \phi \cdot \frac{m}{M}$$

Como $M \gg m$, $\frac{m}{M} \approx 0$, luego,

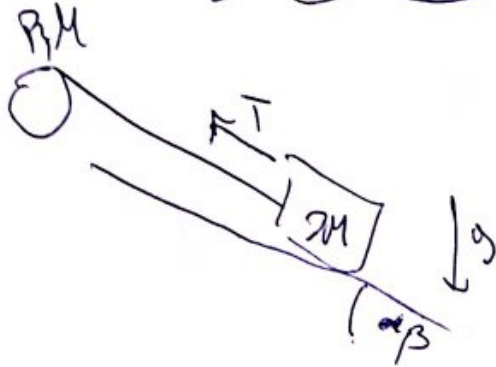
$$\ddot{\phi} = -3gl \sin \phi \cdot 0 = 0.$$

Esto se debe a que M está relacionado con el momento de inercia. Mientras mayor sea M mayor será la resistencia al movimiento.

~~Es un error decir que esta relación depende de M~~
esta relación depende con

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Aux S



En la masa:

$$T - mg \sin \beta = ma, \quad m = 2M$$

$$T - 2Mg \sin \beta = 2Ma \quad (1)$$

En el disco:

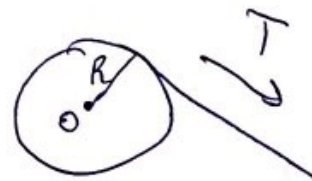
$$\tau_o = R \times T$$

$$= -RT\vec{h}$$

$$L = I\omega\vec{h} \Rightarrow \tau_o = \frac{dL}{dt}$$

$$-RT = I\alpha$$

$$T = -\frac{I\alpha}{R} \quad (2)$$



Sabemos que

$$v_{\text{masa}} = R\omega / \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = R\alpha \quad (3)$$

Reemplazamos la tensión (2) en (1):

$$2Ma = -\frac{I\alpha}{R} - 2Mg \sin \beta, \quad \text{reemplazamos } \alpha$$

$$2Ma + \frac{I}{R} \left(\frac{a}{R} \right) = -2Mg \sin \beta$$

$$a \left(2M + \frac{I}{R^2} \right) = -2Mg \sin \beta, \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\frac{5}{2}aM = -2Mg \sin \beta$$

$$a = -\frac{4}{5}g \sin \beta$$

Como la aceleración es constante sabemos que:

$$V_f^2 - V_i^2 = 2a \cdot \Delta x$$

con Δx = desplazamiento en el plano.


$$\Rightarrow \Delta x \cdot \sin \beta = H$$
$$\Delta x = \frac{H}{\sin \beta}$$

Reemplazamos, con $V_i = 0$

$$V_f^2 = 2a \Delta x$$

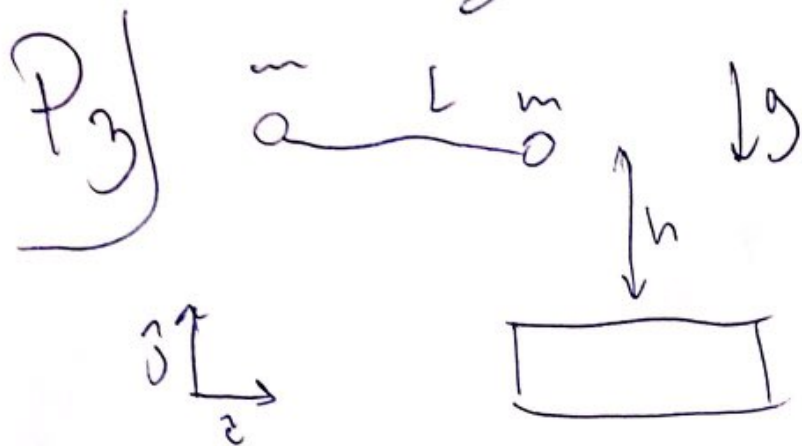
$$= 2 \cdot \frac{4}{5} g \sin \beta \cdot \frac{H}{\sin \beta}$$

$$= \frac{8}{5} g H$$

, nos interesa el módulo de a , por eso lo tomamos como positivo

$$\Rightarrow V_f = \sqrt{\frac{8}{5} g H}$$

Aux 5



En el choque, la masa m cambia su velocidad de

$$V_{antes} = -\sqrt{2gh} \hat{j}$$

$$e \quad V_{desp} = -V_{antes} = +\sqrt{2gh} \hat{j}$$

Las masas caen en aceleración constante, por lo que:

$$V_f^2 - V_i^2 = 2a \Delta x$$

$$V_f^2 = 2gh$$

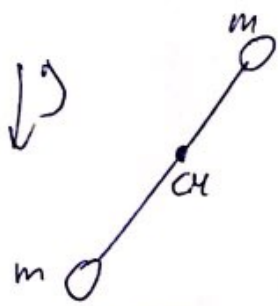
ya que $V_i = 0$ y $\Delta x = h$

$$V_f = \sqrt{2gh}$$

$$\text{o bien, } V_f = -\sqrt{2gh} \hat{j}$$

Esto implica un cambio en el momento lineal y angular. Intuitivamente, uno espera que el sistema comience a rotar.

Estudiamos el CM del sistema:



$$\cancel{L_{mac}} \quad L_{mac} = -Lmg \leftarrow EF$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = -g$$

Estudiamos el τ respecto al CM:

$$\tau_{cm} = r \times Lmg = 0 \times Lmg = 0$$

Además,

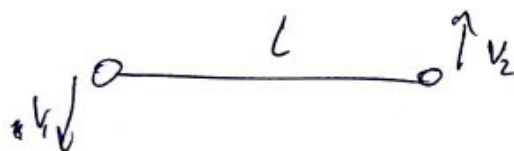
$$\begin{aligned} L &= \cancel{m} r_1 \times p_1 + r_2 \times p_2 \\ &= \frac{L}{2} \cdot m \left(\omega \cdot \frac{L}{2} \right) \hat{h} + \frac{L}{2} m \left(\omega \cdot \frac{L}{2} \right) \hat{h} \\ &= m \omega \frac{L^2}{4} \hat{h} \end{aligned}$$

Igualamos,

$$\tau_{cm} = \frac{dL_{cm}}{dt}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(m \omega \frac{L^2}{2} \right)$$

$\Rightarrow m \omega \frac{L^2}{2} = \text{cte}$, inicialmente, justo después de la colisión:

 con $v_1 = -v_2 = -\sqrt{2gh} \hat{j}$

$$\Rightarrow \omega_i = \frac{\sqrt{2gh}}{\frac{L}{2}} \hat{k} = \frac{2\sqrt{2gh}}{L} \hat{k}$$

$$L_i = L_f \Rightarrow m \omega_i \frac{L^2}{2} = m \omega_f \frac{L^2}{2}$$

$\omega_i = \omega_f \Rightarrow$ la velocidad angular es constante y

$$\omega = \frac{2\sqrt{2gh}}{L} \hat{k}$$

Cuando el hilo esté horizontal:



$$\boxed{T = m a_c}$$

$$-mg = m a$$

Con $a = a_c$

Como $T = m a_c$ y $a_c = \omega^2 \frac{L}{2}$

concluimos que $T = m \left(\frac{g - 2gh}{L^2} \right) \cdot \frac{L}{2} = \frac{4mgh}{L}$