FI1002-2 Sistemas Newtonianos
Profesor: Nicolás Huneeus
Auxiliares: Diego Castillo, Felipe San Martin, Paulina Palma

Auxiliar 4: Sólido Rigido y Energia Cinética de Rotación

16 de Octubre de 2018

P1. Dos esferas identicas, cada una de masa M y de Radio R son adheridas firmemente entre si. El conjunto puede rotar libremente en torno a un eje fijo tangente a uno de los polos del cuerpo, pivoteado en el canto horizontal de una mesa. Las esferas se disponen con su eje polar vertical y se les deja caer desde el reposo por efecto de la gravedad g. Determine la velocidad angular del cuerpo como función del ángulo de caida θ. *Hint:* El momento de inercia con respecto al eje central de una esfera maciza es $\frac{2}{5}mr^2$

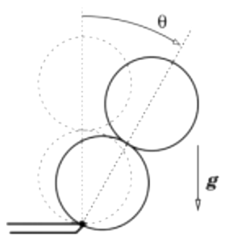

Figura 1: P1

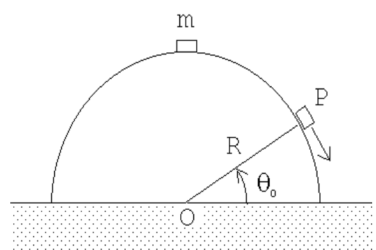

Figura 2: P2

P2. Una masa m resbala, sin roce y debido a la gravedad, por la superficie de una semiesfera de radio R. La masa parte desde la cúspide sin velocidad inicial. Sea P el punto en el cual la masa se separa de la semiesfera. Encuentre el ángulo de elevación θ_0 del punto P

P3. El glorioso dfi desea construir la inmisericorde 'cortacabezas mechonas', máquina construida con un disco afilado (radio r; densidad uniforme δ y una barra de longitud d y de densidad tambien unidorme δ, unida en sus extremos al centro del disco y a un eje fijo en el techo . Para no sufrir las barbaries de este artefacto (y para ahorrar presupuesto), el desalmado dfi le pide a usted que desarrolle unos cálculos para ellos

a) Determinar el momento de inercia del disco con respecto al eje o, sabiendo que el momento de inercia sobre un eje que pasa diametralmente al disco es $I = \frac{1}{4}MR^2$

b) Encontrar la velocidad angular ω como función de θ conociendo que el disco es soltado desde un ángulo θ_0 con respecto a la vertical. Además, encuentre cuándo ésta es máxima.

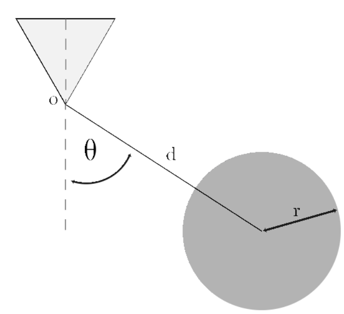

Figura 3: P3

Solución

P1. Se procederá a resolver el problema con energía. Notamos que el sistema solo está expuesto a la fuerza gravitacional. Como esta es una fuerza conservativa se podrá utilizar :

$$\Delta(U + E) = 0$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

Hay que señalar y destacar que el sistema rota en función del punto de apoyo que denotaremos "p". Considerando esto, decimos que la única energía cinética es la rotacional ya que el sistema rota en función del punto p sin desplazarse horizontal o veticalmente:

$$mgh_i + \frac{1}{2}I\omega_i^2 = mgh_f + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

En este punto tenemos un par de incognitas, por lo que iremos por parte:

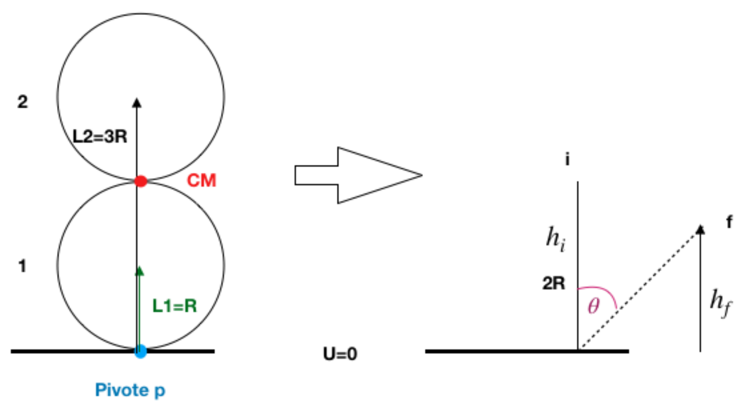

Figura 4:

- Las alturas h's son la distancia de nuestro punto de referencia (que pondremos a nivel del suelo), hasta nuestro centro de masa (es ahi donde se aplica nuestra fuerza gravitacional). Como se tiene dos esferas simétricas acopladas, se puede decir por simetría que el centro de masa se encuentra justo en la unión de estas dos.

- Inercia:
  Sacando la inercia de la primera esfera en torno al punto p con Steine (ignorando la segunda):

  $$I_{p1} = I_{CM} + ML_1^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

  Sacando la inercia de la segunda esfera en torno al punto p con Steiner (ignorando la primera):

  $$I_{p2} = I_{CM} + ML_2^2 = \frac{2}{5}MR^2 + M(3R)^2 = \frac{47}{5}MR^2$$

  La inercia total del sistema será la suma de todas las incercias por separado (es util descomponer las figuras en sistemas complejos). La inercia total del sistema en torno al punto p será entonces:

  $$I_p = I_{p1} + I_{p2} = \frac{54}{5}MR^2$$

Ahora definimos nuestro momento inicial i cuando las esferas están en reposo verticalmente y nuestro momento f cuando esta se encuetra cayendo con un angulo θ arbitrio. Como en un el momento inicial nuestros si tema está en reposo se tiene:

$$2Mgh_i + \cancelto{0}{\frac{1}{2}I_p\omega_i^2} = 2Mgh_f + \frac{1}{2}I_p\omega_f^2$$

Descomponiendo h_f:

$$2Mg2R+ = 2Mg2Rcos(\theta) + \frac{1}{2}\frac{54}{5}MR^2\omega_f^2$$

$$\omega^2 = \frac{2mg4R(1-cos(\theta)}{\frac{54}{5}MR^2}$$

$$\omega(\theta) = \sqrt{\frac{40g(1-cos(\theta))}{54R}}$$

P2. Nos encontramos con fuerzas conservativas. Por ende la energia se conserva teniendo:

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

Hay que tener MUCHO cuidado que si el objeto se moviera siempre a lo largo de la circunferencia ,su energía cinética seria solo cinética rotacional. Como en el punto P se despega, a partir de ese punto, se tiene que tomar la cinética de translación. Descomponiendo la altura h y diciendo que el sistema parte en reposo:

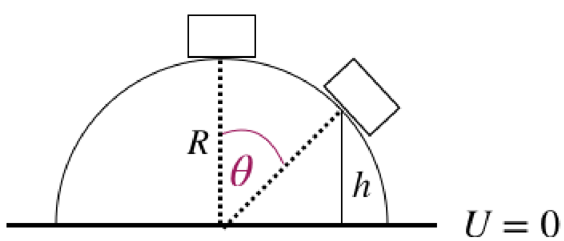

Figura 5:

$$mgR + \cancelto{0}{\frac{1}{2}I_p\omega_i^2} = mgRcos(\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgR(1-cos(\theta)) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gR(1-cos(\theta))$$

Para proceder, nos fijameremos en las fuerzas que actúan en el deslizamiento. Recordamos que la fuerza centripeta esa dada por $F_c = -\frac{mv^2}{R}$

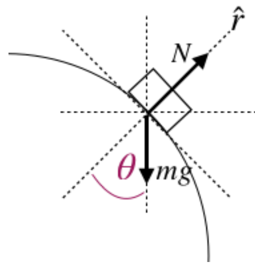

Figura 6:

$$\hat{r} : N - mgcos(\theta) = F_c = -\frac{mv^2}{R}$$

Despejando N:

$$N = mgcos(\theta) - \frac{m}{R}v^2 = mgcos(\theta) - \frac{m}{R}[2gr(1 - cos(\theta)]$$
$$N = mg(3cos(\theta) - 2)$$

El momento que se despega es cuando $N = 0$. Como m y g son distintos de 0, se tiene que imponer que:

$$3cos(\theta) - 2) = 0$$
$$3cos(\theta) = 2$$
$$\theta = arcos(\frac{2}{3}) \approx 48{,}18^{o}$$

Ojo, que el angulo que se pide en enunciado θ_0 es el que parte desde la horizontal y no desde la vertical. Finalmente:

$$\theta_0 = 90 - \theta = 42{,}92^{o}$$

P3. *a*) Esta parte se utiliza el teorema de Steiner para ejes perpendiculares. Esta dice que si tenemos 3 ejes ortogonales entre si (por ejemplo {x,y,z}), al saber la inercia con respecto a 2 de sus ejes, podemos saber el del tercero. En este caso nos dicen que la inercia diametral del disco es $I = \frac{1}{4}MR^2$. Por siemetria dibujamos:

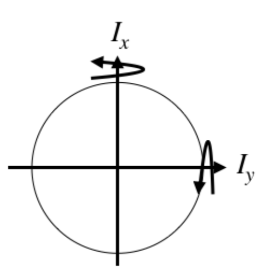

Figura 7:

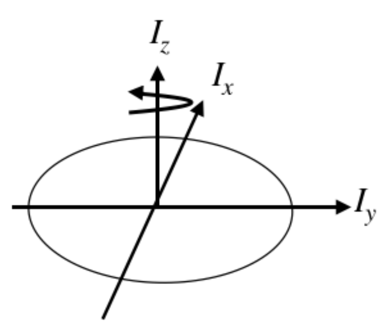

Figura 8:

Entonces tenemos:

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

Lo que representa justamente la inercia de un disco rotando circunferencialmente desde su centro. Luego tenemos que sacar la inerica del sistema completo

- Inercia:

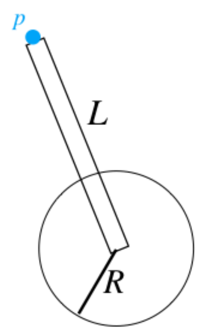

Figura 9:

Escribimos las masas de la forma:

$$M_{barra} = \delta L$$

$$M_{disco} = \delta \pi R^2$$

$$M_T = \delta(L + \pi R^2)$$

Luego, dividimos nuestro sistema en figuras separadas. Nuestro punto de rotación es desde donde oscila la 'corta cabezas'. Es el punto p de donde esta afirmado la barra de largo L . Las dos figuras son la barra y el disco. La inercia de la barra desde el punto de rotacion p es :

$$I_{barra,p} = I_{barra,CM} + M_b D^2 = \frac{1}{12}M_b L^2 + M_b(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3}M_b L^2$$

El disco por su parte, tendra una inercia con respecto a p de la forma:

$$I_{disco,p} = I_{disco,CM} + M_d D^2 = \frac{1}{2}M_d R^2 + M_d(L)^2$$

Por ende, la inercia total será:

$$I_{total,p} = I_{barra,p} + I_{disco,p} = \frac{1}{2}M_d R^2 + \frac{1}{3}M_b L^2 + M_d L^2$$

b) Esta parte es muy parecida a **P1** a) en terminos de como abordarlo. Por eso, iremos de la misma forma.
El sistema solo esta expuesto a fuerzas conservativas, entonces:

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$mgh_i + \frac{1}{2}I\omega_i^2 = mgh_f + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Las alturas tienen que ser con resepcto al centro de masa (ahi se genera la fuerza gravitacional). Ocupando la formula:

$$\vec{Y_{CM}} = \frac{1}{M_T}[M_b * D_{cm\ barra} + M_d * D_{cm\ disco}] = \frac{1}{\delta(L+\pi R^2)}[(\delta L) * \frac{L}{2} + (\delta \pi R^2) * L]$$

$$Y_{CM} = L\frac{\frac{L}{2} + \pi R^2}{L + \pi R^2}$$

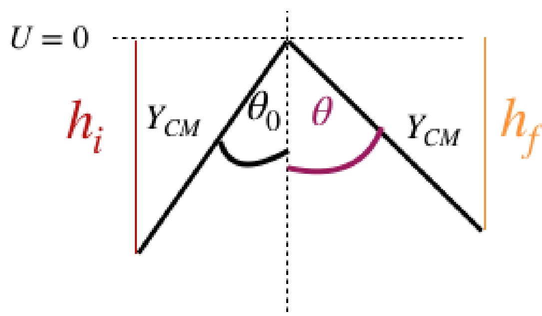

Figura 10:

$$h_i = -mgY_{CM}cos(\theta_0)$$
$$h_f = -mgY_{CM}cos(\theta)$$

Imponiendo que el sistema parte del reposo:

$$M_T g h_i + \cancelto{0}{\frac{1}{2}I_{total,p}\omega_i^2} = M_T g h_f + \frac{1}{2}I_{total,p}\omega_f^2$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2mgY_{CM}(cos(\theta) - cos(\theta_0))}{I_{total,p}}}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2mgL\frac{\frac{L}{2}+\pi R^2}{L+\pi R^2}(cos(\theta) - cos(\theta_0))}{\frac{1}{2}M_d R^2 + \frac{1}{3}M_b L^2 + M_d L^2}}\ [rad/s]$$

Para sacar ω_f máximo, tenemos que derivarlo e igualarlo a 0.

$$\frac{d\omega_f(\theta)}{d\theta} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{2mgY_{CM}}{I_{total,p}}(-sen(\theta))\frac{1}{\sqrt{\frac{2mgY_{CM}(cos(\theta)-cos(\theta_0))}{I_{total,p}}}} \stackrel{!}{=} 0$$

Que solo pasa cuando $sen(\theta) \stackrel{!}{=} 0$, es decir $\theta = 0$

Justo cuando pasa por la vertical! (kemozion)